Zadania domowe, seria 7

29 listopada 2013

Proszę o oddanie rozwiązań do 9 grudnia.

1. Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, oraz $\mathcal{A}$ bazą V zaś $\mathcal{B}$ bazą W. W każdym z poniższych przykładów znaleźć macierz $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, a także bazy $\ker f$ oraz $\mathrm{im} f$:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{A} = \{(0,1,1),(0,2,1),(1,1,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,1,0,1),(0,1,1,1)\}$, przekształcenie zadane jest wzorem $f((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1+x_2+x_3, x_1+2x_2, x_1-x_2+x_3, 4x_1+5x_2+x_3)$

b) $V =$ wielomiany rzeczywiste stopnia ≤ 4, $W =$ wielomiany rzeczywiste stopnia ≤ 2, $\mathcal{A} = \{x^2+x, x+1, x^3+x^2, x^4-x^3, x+2\}$, $\mathcal{B} = \{x+2, x^2-x, x+3\}$, przekształcenie f przyporządkowuje wielomianowi $w(x)$ sumę jego reszty z dzielenia przez x^3+x i reszty z dzielenia przez x^2-1.

2. Przypomnijmy treść zadania 2 z serii 6: " Niech V, V', W, W' będą przestrzeniami liniowymi nad pewnym ciałem K.

a) Wykazać, że dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : V' \to V$ odwzorowanie $\phi^* : L(V,W) \to L(V',W)$ zdefiniowane przez równość $\phi^*(\psi) = \psi \circ \phi$ dla $\psi \in L(V,W)$ jest przekształceniem liniowym.

b) Wykazać, że dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : W \to W'$ odwzorowanie $\phi_* : L(V,W) \to L(V,W')$ zdefiniowane przez równość $\phi_*(\psi) = \phi \circ \psi$ dla $\psi \in L(V,W)$ jest przekształceniem liniowym. "

Oznaczmy: $\dim V = n$, $\dim V' = n'$, $\dim W = m$, $\dim W' = m'$, $\dim \ker \phi = k$.

a) Obliczyć $\dim \ker \phi^*$ i $\dim \mathrm{im} \phi^*$ dla oznaczeń z części a).

b) Obliczyć $\dim \ker \phi_*$ oraz $\dim \mathrm{im} \phi_*$ dla oznaczeń z części b).

3. Niech V będzie przestrzenią linową nad ciałem K o charakterystyce $\neq 2$, tzn. $a + a \neq 0$ dla dowolnego $a \in K, a \neq 0$. Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem liniowym spełniającym $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_V$. Wtedy ϕ jest pewną symetrią równoległą.