Zadania domowe, seria 5

13 listopada 2013

Proszę o oddanie rozwiązań do 16 listopada.

Zadanie 1. Niech $V = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_m)$ będą wektorami K^n, gdzie K oznacza pewne ciało. Udowodnić poprawność następującej metody wybierania spośród wektorów $(v_1, \ldots, v_m)$ bazy V: tworzymy macierz M, której kolejne kolumny $k_1, \ldots, k_m$ są wektorami $v_1, \ldots, v_m$ zapisanymi pionowo. Przy pomocy przekształceń wierszowych trzech rodzajów przekształcamy macierz M do macierzy w postaci schodkowej M', której kolumnami są $k'_1, \ldots, k'_m$. Niech liderzy kolejnych niezerowych wierszy macierzy M' stoją w kolumnach $k'_{j_1}, \ldots k'_{j_l}$. Wtedy wektory $v_{j_1}, \ldots v_{j_l}$ można przyjąć za wektory pewnej bazy$\mathcal{B}$ przestrzeni V (czyli $\dim V = l$). Ponadto, jeśli macierz M' jest w postaci schodkowej zredukowanej to współrzędnymi wektora v_j w bazie $\mathcal{B}$ są kolejne elementy począwszy od pierwszego a kończąc na elemencie nr l kolumny k'_j macierzy M'.

Zadanie 2. Pewną macierz M sprowadzono dwukrotnie operacjami wierszowymi (niekoniecznie takimi samymi) trzech rodzajów do postaci schodkowej zredukowanej otrzymując za pierwszym razem macierz M' a za drugim macierz M''. Udowodnić, że $M' = M''$.

Zadanie 3. Poniżej określono pewne podprzestrzenie $V = lin(v_1, \ldots, v_m)$ przestrzeni K^n, gdzie K jest ciałem. Wybrać z układów $v_1, \ldots, v_m$ bazy podprzestrzeni V oraz określić w tych bazach współrzędne pozostałych (niebazowych) wektorów układu $v_1, \ldots, v_m$. Podać układ równań liniowych jednorodnych z n niewiadomymi opisujących $V \subset K^n$.

a) $V = lin((1,1,2,0,1),(2,2,4,0,2),(1,1,1,1,1),(1,1,4,-2,1),(0,0,0,1,1)) \subset \mathbb{R}^5$.

b) $V = lin((2+i,1,-i,1+i),(i,-i,2,1),(-1+5i,-2i,7,2+i)) \subset \mathbb{C}^4$

c) $V = lin((2,3,1,4),(1,4,3,2),(0,1,0,1),(4,0,2,2)) \subset \mathbb{Z}_5^4$.

Zadanie 4. Niech $V = lin((1,1,2,3,1),(3,3,6,9,3),(0,1,0,0,1)) \subset \mathbb{R}^5$, natomiast W niech będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^5$ opisaną układem dwóch równań liniowych jednorodnych $2x_1 - 3x_5 = 0, 3x_2 - x_3 = 0$. Znaleźć bazy $V \cap W$

oraz $V+W$ oraz opisy tych podprzestrzeni $\mathbb{R}^5$ odpowiednimi układami równań liniowych jednorodnych z 5 niewiadomymi.