Proszę o oddanie rozwiązań do 18 października.

Używane oznaczenia: $\mathbb{Q}$ - ciało liczb wymiernych, $\mathbb{R}$ - ciało liczb rzeczywistych, $\mathbb{C}$ - ciało liczb zespolonych, $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych $\{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}_p$ - dla liczby pierwszej p - ciało reszt z dzielenia przez p (również ogólniej, dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ oznaczymy przez $\mathbb{Z}_n$ - zbiór reszt z dzielenia przez n z podobnymi działaniami jak w $\mathbb{Z}_p$)

Zadanie 1. Niech K będzie ciałem, zaś a, b, c jego elementami. Wyprowadzić z aksjomatów ciała (wskazując na te, z których się korzysta), lub z wcześniej z nich wyprowadzonych twierdzeń, że:

a) jeśli $ac = bc$ i $c \neq 0$ to $a = b$

b) $(-1) \cdot a = -a$

c) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab$, $(-a) \cdot (-b) = ab$

Zadanie 2. Udowodnić, że dla dowolnego elementu $a \neq 0$ w skończonym ciele K istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, że $a^n = 1$.

Zadanie 3. Udowodnić metodą indukcji matematycznej, że dla dowolnego $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$ i $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, zachodzi: $\sum_{j=1}^{n} j z^j = z \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$

Zadanie 4.

Rozwiązać metodą macierzową układy równań:

a) w ciele $\mathbb{Z}_5$:

$$U_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 3 \end{array} \right.$$

b) W ciele $\mathbb{C}$:

$$U_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} ix_1 & + & (1+i)x_2 & + & (3+2i)x_3 & + & 4x_4 & = & 2+i \\ x_1 & - & ix_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{array} \right.$$