Matematyka finansowa

26 kwietnia 2013 roku

1. **Stopy procentowe**. NSP - *nominalna stopa procentowa* - zwykle określona w skali roku. Jeśli rok dzieli się na n równych podokresów (miesięcy, kwartałów, tygodni, dni, itp.) to stopa podokresowa wynosi NSP/n. *Czynnik oprocentowujący*- ρ wskazuje ile razy ulokowany kapitał wzrósł w danym okresie, jeśli stopa procentowa w danym okresie wynosi r, to przy kapitalizacji na koniec okresu $\rho = 1 + r$. *efektywna stopa procentowa* - stopa określająca o jaki procent wzrósł ulokowany kapitał w okresie jednostkowym (w ciągu roku). Jeśli rok podzielono na n równych okresów kapitalizujących i $NSP = r$ to roczny czynnik oprocentowujący $\rho = (1 + (r/n))^n$ czyli stopa stopa efektywna $r_{ef} = \rho - 1 = (1 + (r/n))^n - 1$. Przykłady: roczna $NSP = 10\%$. Przy kapitalizacji rocznej $r_{ef} = 10\%$, przy kwartalnej $\rho = (1 + 0,1/4)^4 = 1,1038$ czyli $r_{ef} = 0,1038 = 10,3\%$. Stopa realna - stopa procentowa z uwzględnieniem inflacji: jeśli stopa procentowa wynosi r, inflacja i to $r_{real} = (1 + r)/(1 + i) - 1$. Np. jeśli $r = 10\%$, $i = 5\%$ to $r_{real} = (1 + 0,1)/(1 + 0,05) - 1) = 0,047 = 4,7\%$. jeśli inflacja w kolejnych okresach wynosiła $i_1, i_2, \ldots, i_n$ to inflacja średnia wynosi $\sqrt[n]{(1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \cdots \cdot (1 + i_n)} - 1$. Np. jeśli inflacja w 1 roku wynosiła 2%, w drugim 3%, w trzecim 10% to średnia roczna inflacja wtych trzech latach to $\sqrt[3]{(1 + 0,02) \cdot (1 + 0,03) \cdot (1 + 0,1)} - 1 = 0,049 = 4,9\%$.

Oprocentowanie proste. Odsetki w oprocentowaniu prostym obliczamy według wzoru $I = r \sum_{i=1}^{n} t_i K_i = r(t_1 K_1 + \cdots + t_n K_n)$, gdzie I oznacza odsetki, $r = NPS$ oznacza stopę procentową, t_i oznacza długość okresu nr i (wyrażonego w tych samych jednostkach, względem których wyrażamy NPS),zaś K_i stan kapitału na koncie w tym okresie, gdzie $i = 1, \ldots, n$. Możemy dopuścić również zmienność stopy procentowej, wtedy wzór przyjmie postać $I = \sum_{i=1}^{n} t_i K_i r_i$, gdzie r_i oznacza stopę procentową w okresie nr i. Przykład: Pan A założył konto oprocentowane według następujących zasad: wpłaty i wypłaty księguje się następnego dnia, debet jest oprocentowany podwójną stopą procentową, odsetki dopisuje się do kapitału z początkiem miesiąca, czas liczymy według rzeczywistej liczby dni w roku.

Aktualizacja. Przypuśćmy, że stopa procentowa wynosi r. Jeśli w chwili 0 miałem K_0 to w chwili n będę miał $(1+r)^n K$. Na odwrót: jeśli w chwili n mam K_n to musiałem mieć w chwili 0 sumę $(1+r)^{-n} K_n$ (zakładamy, że nie ma poza tym wpłat ani wypłat). Możemy uważać kwotę K w chwili l za równoważną kwocie $K(1+r)^{n-l}$ w chwili n - przy czym dopuszczamy zarówno $n > l$ jak i $n \leq l$. Takie przeliczanie kwot z jednego momentu na inny nazywamy *aktualizacją*, zaś liczbę $\alpha_n^l = (1+r)^{n-l}$ nazwiemy *czynnikiem aktualizującym* (z momentu l na moment n). Możemy w ten sposób aktualizować nie tylko pojedyncze kwoty, ale również ciągi wpłat i wypłat, czyli przepływy finansowe. Wartość zaktualizowaną w momencie n ciągu przepływów $\mathcal{F}$ będziemy oznaczać $V_n(\mathcal{F})$. Przykłady : F_i oznacza przepływ finansowy w chwili i, zaś r stopę procentową (w jednostkowym okresie, możemy przyjąć – roku) a) $r = 5\%$, $\mathcal{F} = \{F_0 = 1000, F_2 = 2000\}$. Mamy $V_3(\mathcal{F}) = (1+r)^{3-0} F_0 + (1+r)^{3-2} F_2 = 1,05^3 \cdot 1000 + 1,05^1 \cdot 2000 = 3257,625$ – jest to kwota jaką będziemy mieli na koncie w 3 roku, przy czy $\mathcal{F}$ opisuje ciąg wpłat. $V_0(\mathcal{F}) = (1+r)^{0-0} F_0 + (1+r)^{0-2} F_2 = 1000 + 1,05^{-2} \cdot 2000 = 2814,059$ – tyle musielibyśmy mieć na koncie w chwili 0 aby po trzech latach mieć tyle samo co w rezultacie wpłat $\mathcal{F}$. b) $r = 8\%$, $\mathcal{F} = \{F_0 = -4000, F_1 = 1000, F_2 = 1500$. Mamy $V_3(\mathcal{F}) = 1,08^3 \cdot (-4000) + 1,08^2 \cdot 1000 + 1,08 \cdot 1500 = -2252,45$. Czyli jeśli bym się na początku zadłużył na 4000, po roku spłacił 1000, po dwóch 1500, to po 3 latach byłbym zadłużony na 2252,45. Efekt byłby taki sam, gdybym zaciągnął na początku dług $|V_0(\mathcal{F})| = |-4000 + 1,08^{-1} \cdot 1000 + 1,08^{-2} \cdot 1500 = |-1788,07|$ i nic nie spłacał. Istotnie $(1,08)^3 \cdot 1788,07 = 2252,45$.

Uwaga: Aktualizację wstecz nazywa się *dyskontowaniem* lub obliczaniem *wartości bieżącej*, zaś aktualizację naprzód – *oprocentowaniem* lub obliczaniem *wartości przyszłej*

Zastosowania Spłacanie zadłużenia: wartość długu w danym momencie można obliczyć na dwa sposoby: jako różnicę zaktualizowanej na dany moment (dopuszczamy tylko momenty kapitalizacji odsetek) wartości początkowej długu i sumy zaktualizowanych dotad zapłaconych rat, lub też, jako zaktualizowaną sumę łącznych rat, pozostałych do spłaty długu. Ponadto raty spłaty rozkładamy na dwa składniki: ratę odsetkową, równą okresowej stopie procentowej $\times$ wartość dotychczasowego zadłużenia, oraz ratę kapitałową, określającą o ile zmniejszyło się zadłużenie. Rata odsetkowa jest spłacana w całości (w szczególności jeśli rata całkowita jest od niej mniejsza, to rata kapitałowa jest ujemna – zadłużenie wzrasta). W praktyce przeważają dwa typy regularnych sposobów spłaty zadłużenia: stałymi ratami całkowitymi oraz stałymi ratami kapitałowymi. Oprócz tego występują nieregularne schematy spłaty. Przykłady:

Przykłady: Zaciągnąłem 10000 długu na 10%, po roku spłaciłem 2000, po 3 latach od zaciągnięcia 5000, ile będę musiał zapłacić na koniec 4 roku, aby spłacić całość? Mamy $V_4 = 1,1^4 \cdot (-10000) + 1,1^3 \cdot 2000 + 1,1 \cdot 5000 = -6479$ – będę musiał wpłacić 6479. Tę spłatę można ująć w poniższej tabeli, której kolejne rubryki oznaczają numer okresu spłaty, wartość zadłużenia na początku okresu, wartość raty odsetkowej, wartość raty kapitałowej, wartość łącznej raty, zadłużenie na koniec okresu:

		Plan spłaty zadłużenia				
		Dług, p.o.	Rata ods.	Rata kap.	Rata	Dług, k.o
Okres	1	10000	1000	1000	2000	9000
	2	9000	900	-900	0	9900
	3	9900	990	4010	5000	5890
	4	5890	589	5890	6479	0

Pan A zaciągnął kredyt hipoteczny w kwocie 200000 na 8% (stopa nominalna), spłacany przez 25 lat równymi ratami miesięcznymi. Po 10 latach zdecydował się zrezygnować z kredytu i spłacić go od razu. Przy tym, zgodnie z umową musi zapłacić opłatę wynoszącą 5% odsetek, które by zapłacił przy kontynuowaniu kredytu. Ile wynosiło jego zadłużenie (zakładamy, że zapłacił 120 ratę miesięczną). Ile wyniesie opłata? Podstawowym okresem jest tutaj miesiąc. Stopa miesięczna $r_m = 0,08/12 = 0,00666\ldots$. Obliczamy ratę miesięczną, biorąc pod uwagę $25 \cdot 12 = 300$ okresów miesięcznych: $N = ((200000 \cdot 1,00666^{300}) : (1,00666^{300} - 1)) \cdot 0,00666 = 1542,57$ (gdyż ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego suma zaktualizowanych rat N to $N \times \frac{(1+r_m)^{300}-1}{r_m}$ zaś zaktualizowany na koniec dług to $200000 \times (1 + r_m)^{300}$). Przez 10 lat wpłacił 120 rat, każda z których wynosiła $1542,57$, zatem jego zadłużenie wyniesie różnicę między zaktulizowanym długiem zaciągniętym na początku a sumą zaktualizowanych rat. Zaktualizowany dług początkowy to $200000 \times (1,00666)^{120} = 443575,39$, zaś suma zaktualizowanych rat to $N\times((1+r_m)^{119}+(1+r_m)^{118}+\cdots+1) = N\times((1+r_m)^{120}-1)/r_m = 281827,25$. Zadłużenie to różnica $443575,39 - 281827,25 = 161748,14$. Zadłużenie= sumie rat kapitałowych do spłacenia, reszta sumy pozostałych rat to odsetki. Odsetki zatem wyniosą: suma pozostałych do spłacenia rat-kapitał do spłacenia (dług)=$180\times N$-dług=$180 \times 1542,57 - 161748,14 = 115914,46$. opłata 5% od tej kwoty to $0,05 \times 115914,46 = 5795,72$. Razem będzie miał do zapłacenia dług+opłata= $161748,14 + 5795,72 = 167543,86$.

Wycena obligacji i projektów inwestycyjnych . Zaktualizowana na bieżącą chwilę wartość przedsięwzięcia, czyli V_0 nosi nazwę *bieżącej wartości netto* i jest oznaczane przez NPV (netto present value). Przyjętą do oceny stopę procentową będziemy nazywać *stopą szacowania.* W przypadku mało ryzykownych aktywów, np. obligacji skarbu państwa pokrywa się ona z rynkowa stopą procentową, w przypadku ryzykownych przedsięwzięć należy dodać *premię za ryzyko.* Przykłady; ile warto zapłacić za pięcioletnią obligację o wartości nominalnej 1000 i spłacaną corocznie kuponem 6% oraz na końcu wartością nominału+6%, jeśli rynkowa stopa wynosi 4% ? Przy $r = 4\%$ mamy NPV$= 0,06 \times 1000/(1+r) + 0,06 \times 1000/(1+r)^2 + 0,06 \times 1000/(1+r)^3 + 0,06 \times 1000/(1+r)^4 + 1000 \times 1,06/(1+r)^5 = 1089,04$. Ponieważ stopa rynkowa jest niższa od stopy oprocentowania obligacji, zatem jej wartość jest wyższa od nominału. Makler rozważał zakup podobnej obligacji na giełdzie, w 2 i pół roku od czasu emisji (tzn. poprzedni właściciele pobrali już 2 kupony). Rynkowa stopa procentowa wynosi $r = 8\%$. Ile jest gotów zapłacić?. **Uwaga:** w przeciwieństwie do praktyki stóp procentowych w banku, w okresach ułamkowych nie interpolujemy liniowo, lecz przyjmujemy czynnik aktualizujący α_0^t dla chwili t równy $(1+r)^{0-t} = (1+r)^{-t}$ (czyli tak jak we wzorze ogólnym). Zatem NPV $= V_0 = 0,06 \times 1000 \times (1+r)^{-1/2} + 0,06 \times 1000(1+r)^{-1,5} + 1,06 \times 1000 \times (1+r)^{-2,5} = 985,67$. Ponieważ stopa oprocentowania obligacji jest niższa od stopy rynkowej, jej wartość jest mniejsza od nominału. Kupno obligacji łączy się z *ryzykiem stóp procentowych.* Do określenia tego ryzyka służy tzw.*duracja* (duration) inaczej nazywana *średnim ważonym czasem trwania.* Jeśli obligacja ma wartość NPV i daje wpływy $F_{t_1}, F_{t_2}, \ldots, F_{t_n}$ w kolejnych chwilach $t_1, t_2, \ldots t_n$ to jej duracja wynosi $\frac{t_1 \times F_{t_1} \times \alpha_0^{t_1} + t_2 \times F_{t_2} \times \alpha_0^{t_2} + \cdots + t_n \times F_{t_n} \times \alpha_0^{t_n}}{NPV} = \frac{t_1 \times F_{t_1} \times (1+r)^{-t_1} + t_2 \times F_{t_2} \times (1+r)^{-t_2} + \cdots + t_n \times F_{t_n} \times (1+r)^{-t_n}}{NPV}$. Zatem duracja w drugim z rozpatrywanych przypadków wyniesie $\frac{1/2 \times 0,06 \times 1000 \times (1+r)^{-1/2} + 1,5 \times 0,06 \times 1000 \times (1+r)^{-1,5} + 2,5 \times 1,06 \times 1000 \times (1+r)^{-2,5}}{NPV} = \frac{1/2 \times 0,06 \times 1000 \times 1,08^{-1/2} + 1,5 \times 0,06 \times 1000 \times 1,08^{-1,5} + 2,5 \times 1,06 \times 1000 \times 1,08^{-2,5}}{985,67} = 2,32$. Sens tej liczby jest następujący: jeśli czynnik procentujący $1 + r$ wzrośnie o 1% (np. w wyniku decyzji RPP) to wartość obligacji spadnie o około duracja %. Dla małych stóp procentowch można wzrost $1 + r$ w przybliżeniu utożsamić z wzrostem r o 1%. Czyli w naszym przypadku, jesli $1 + r$ wzrośnie o 1% czyli r wzrośnie o $1,08\%$ do $9,08\% \approx 9\%$ to wartość takiej obligacji spadnie o około $2,32\%$. Dla obligacji bezkuponowych duracja pokrywa sie z czasem wykupu obligacji: jeśli kupiłem taką obligację 10 letnią, to wzrost stóp o 1% z dnia na dzień, spowoduje, że wartośc tych obligacji spadnie o 10%.

Wprowadzone pojęcia te można również stosować do realnych inwestycji, z tym, że wydaje się stosowne wówczas rozpatrywanie przychodów w cenach stałych i odpowiednio, realnych stóp procentowych. Rozważmy nastepującą inwestycję: firma rozpatruje zastąpienie oświetlenia żarówkami, w liczbie

5000 żarówek 100 watowych świetlówkami, lub lampami LED. Świetlówki i lampy LED mogą zastąpić żarówkę pięciokrotnej mocy, żywotność żarówek wynosi 1000 godzin, świetlówek 3000 godzin, lamp LED 10000 godzin. Żarówka kosztuje złotówkę, świetlówka 20 W – 13 zł , lampa LED mocy 2 W kosztuje 7 zł. Oprawki do świetlówek kosztują 40 zł 20 zł sztuka, do lamp LED 50 zł gniazdo do 10 lampek. W ciągu roku światło pali się 4000 godzin. Koszt kWh wynosi 50 groszy. Firma finansowałaby inwestycję kredytem na 6%. Rozpatrzyć opłacalność tych inwestycji w perspektywie 20 lat oraz ∞.

Immunizacja portfela obligacji. Przypuśćmy, że mamy w danej chwili nadwyżkę finansową oraz zobowiązanie do płatności kwoty S za pewien czas. Chcielibyśmy możliwie swobodnie dysponować swoimi zasobami, jednak przy zagwarantowaniu wspomnianej płatności. Najprościej, byłoby odłozyć tę kwotę w formie gotówki. Wtedy jednak tracilibyśmy możliwe do uzyskania odsetki. Aby temu zapobiec należy ulokować odpowiednią kwotę w jakimś małoryzykownym instrumencie finansowym, np. obligacjach skarbu państwa. Jeśli na rynku są bezkuponowe obligacje z terminem wykupu pokrywającym się z terminem naszej płatności to wystarczy zakupić odpowiedni portfel takich obligacji. Zwykle jednak nie można znaleźć tak dopasowanej emisji obligacji. Często są natomiast obligacje o wcześniejszym i późniejszym terminie wykupu. Wartość takich obligacji w chwili płatności zależy od rynkowej stopy procentowej. Odpowiednio komponując portfel z takich obligacji możemy zapewnić sobie, że przy zmianach stóp łączna wartość porfela w chwili płatności będzie ulegała bardzo małym zmianom i praktycznie gwarantowała płatność. Takie komponowanie portfela nosi nazwę *immunizacji*. Podstawowe zasady tej kompozycji są następujące:

- łączna wartość porfela zaktualizowana na chwilę płatności jest równa tej płatności
- łączna duracja porfela jest równa chwili płatności

Przykład. Na rynku są obligacje bezkuponowe o terminie wykupu z 1 rok i nominale 100 zł *al pari*, tzn. za rok otrzymamy 100 zł, oraz trzyletnie obligacje z corocznym kuponem 5% od nominału 100 zł. Skomponować z tych obligacji immunizowany portfel zabezpieczający płatność 200000 zł za dwa lata, jeśli obecna rynkowa stopa procentowa wynosi $r = 4\%$. Oznaczmy prze k udział kwotowy w portfelu obligacji pierwszego rodzaju, zaś przez l udział kwotowy obligacji drugiego rodzaju, tzn. $k + l = 1$. Duracja obligacji pierwszego rodzaju wynosi $d_1 = 1$, zaś obligacji drugiego rodzaju $d_2 = (5 \times 1 \times 1,04^{-1} + 5 \times 2 \times 1,04^{-2} + 105 \times 3 \times 1,04^{-3})/(5 \times 1,04^{-1} + 5 \times 1,04^{-2} + 105 \times 1,04^{-3}) = 2,86$. Duracja portfela różnych obligacji jest średnią ważoną duracji składników, w której wagami są kwotowe udziały poszczególnych obligacji w portfelu, czyli łączna duracja portfela wyniesie $k \times d_1 + l \times d_2$, skąd uzyskujemy równanie: $k \times 1 + l \times 2,86 = 2$. Ponieważ $k = 1 - l$ zatem $(1 - l) \times 1 + l \times 2,86 = 2$ skąd $l \times 1,86 = 1$ czyli $l = 0,54$ zaś $k = 0,46$. Wartość portfela za 2 lata ma wynieść 200000 zatem jego wartość bieżąca to $1,04^{-2} \times 200000 = 184911,24$. obligacji pierwszego typu zakupimy więc za $k \times 184911,24 = 85059,17$ zaś drugiego rodzaju za $l \times 184911,24 = 99852,07$ (zaniedbaliśmy tu niemożność zakupu ułamkowych części obligacji).

Zadania przygotowujące do kolokwium 1. Podstawowe pojęcia. a) Stopa inflacji. Skład kwotowy koszyka dóbr konsumpcyjnych jest następujący: 30% żywność, 30% opłaty mieszkaniowe, 10% transport, 10% dobra kulturowe, 10% ubrania, 10% sprzęt AGD. W ciągu roku ceny zywności wzrosły o 10%, opłaty czynszowe o 7%, ceny przewozów o 6%, ceny dóbr kultury nie zmieniły się, ubrań wzrosły o 3% ceny sprzętu AGD spadły o 4%. Ile wyniosła inflacja liczona według tego koszyka? Odp. za koszyk kosztujący 1 na początku roku pod jego koniec trzeba było zapłacić $0,3 \times 1,1 + 0,3 \times 1,07 + 0,1 \times 1,06 + 0,1 \times 1 + 0,1 \times 1,03 + 0,1 \times 0,96 = 1,056$. Czyli inflacja wyniosła $1,056 - 1 = 0,056 = 5,6\%$. Inflacja w kolejnych czterech latach wynosiła 5%, 10%, 8% i 6%. jaka była średnia roczna inflacja w ciągu tych czterech lat? Odp. Srednia inflacja wyniosła $\sqrt[4]{1,05 \times 1,1 \times 1,08 \times 1,06} - 1 = 0,072$ czyli $7,2\%$. 2. Nominalna i efektywna stopa procentowa, stopa efektywna po opodatkowaniu, realna stopa procentowa. NSP= 6% . Ile wyniosła efektywna stopa procentowa (nieopodatkowana) przy kapitalizacji co kwartał, co miesiąc, ciągłej? Odp. Przy kwartalnej $(1 + 0,06/4)^4 - 1 = 0,61 = 6,1\%$, przy comiesięcznej $1 + 0,06/12)^12 - 1 = 0,0617 = 6,17\%$, przy ciągłej $e^{0,06} - 1 = 0,0618 = 6,18\%$. Ile wyniosła efektywna stopa po opodatkowaniu podatkiem 19% od dochodów kapitałowych przy cokwartalnej kapitalizacji i opodatkowaniu co kwartał, a ile przy cokwartalnej kapitalizacji i opodatkowaniu z końcem roku? odp. Przy opodatkowaniu co kwartał, $(1 + 0,06/4 \times 0,81)^4 - 1 = 0,0494 = 4,94\%$. Przy opodatkowaniu z końcem roku $((1 + 0,06/4)^4 - 1) \times 0,81 = 0,0497 = 4,97\%$. Ile wyniosła realna (nieopodatkowana) stopa procentowa jeżeli stopa inflacji wyniosła $i = 4\%$. Realna stopa wyniosła $1,06/1,04 - 1 = 0,019 = 1,9\%$

2. **Rachunek weksli według zasad dyskonta handlowego prostego.** a) Dysponuję 2 wekslami mojego kontrahenta, jednym opiewającym na 1000 zł i płatnym za 10 i drugim opiewającym na 2000zł i płatnym za 20 dni. Kontrahent poprosił o zastąpienie tych płatności jedną za 30 dni. Przystałem na to. Na ile opiewa wystawiony weksel jeśli stosuję 10% dyskonto w ciągu roku, zaś rok przyjmuję za równy 360 dniom? Odp. Zgodnie ze stosowanym przeze mnie dyskontem pirerwszy weksel jest dziś wart

$1000 \times (1 - 0,1 \times 10/360) = 997,22$ zaś drugi $2000 \times (1 - 0,1 \times (20/360)) = 1988,89$ co w sumie daje $2986,11$. Ponieważ płatność ma nastąpić za 30 dni, zatem wystawię weksel na $2986,11/(1 - 0,1 \times 30/360) = 3011,20$. b) Poproszono mnie o zastąpienie weksla opiewającego na 10000 zł płatnego za 10 dni dwoma, jednym płatnym za 15 dni i drugim płatnym za 20 dni, przy czy pierwsza płatność ma być dwa razy większa od drugiej. Obliczyć te płatności jeśli stosuję dyskonto 10% przy 360 dniowym roku. Odp. Oznaczmy druga płatność przez x czyli pierwsza to $2x$. Ponieważ wartość na dziś obu sposobów spłaty wierzytelności ma być równa otrzymujemy równanie $10000 \times (1 - 0,1 \times 10/360) = 2x \times (1 - 0,1 \times 15/360) + x \times (1 - 0,1 \times 20/360)$ czyli $9972,22 = x \times (2 \times (1 - 0,1 \times 15/360) + (1 - 0,1 \times 20/360))$ czyli $9972,22 = 2,986x$ czyli $x = 9972,22/2,986 = 3339,66$ zaś pierwsza płatność to $2 \times 3339,66 = 6679,32$.

3. **Spłata zadłużenia, procent składany** .

a) Uzupełnić poniższa tabelę spłaty zadłużenia, przy założeniu stałej stopy procentowej

		Plan spłaty zadłużenia				
		Dług, p.o.	Rata ods.	Rata kap.	Rata	Dług, k.o
Okres	1		1000		2000	9000
	2			2000		
	3				5700	
	4					0

b) Dwóch panów, A i B zaciągnęło kredyt w wysokości 100000 na 10 lat przy $NSP = 8\%$ przy miesięcznych spłatach z dołu i miesięcznej kapitalizacji odsetek. Pan A spłacał kredyt w równych miesięcznych ratach całkowitych pan B natomiast w równych miesięcznych ratach kapitałowych. Ile wynosiły comiesięczne raty A a ile wynosiły miesięczne raty kapitałowe B? Ile wynosiło zadłużenie każdego z nich na początku 9 roku trwania kredytu? Ile wynosiła 97 rata odsetkowa a ile 97 rata kapitałowa A? Ile odsetek zapłacił B w 9 roku trwania kredytu? Odp. Miesięczna stopa procentowa wynosiła $r_m = 0,08/12 = 0,00666....$ Raty A wyznaczymy przyrównując zaktualizowany na koniec trwania kredytu dług z podobnie zaktualizowanymi ratami. Rat jest 120, oznaczając N pojedynczą całkowitą ratę mamy $100000 \times (1+r_m)^{120} = N \times (1 + (1+r_m) + \cdots + (1+r_m)^{119})$ czyli ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego $100000 \times (1+r_m)^{120} = N \times ((1+r_m)^{120} - 1)/r_m$ skąd $N = \frac{100000 \times (1+0,08/12)^{120} \times 0,08/12}{(1+0,08/12)^{120} - 1} = 1213,27594$ (uwaga: chcąc uzyskać w miarę dokładny wynik przy użyciu kalkulatora najlepiej jest stosować aktualizację na koniec trwania kredytu i unikać ręcznego wprowadzania pośrednich wyników, a szczególnie okresowych stóp procentowych). Raty kapitałowe B wynosiły $1000000/120 = 833,33\ldots$. Zadłużenie A na początku 9 roku, czyli po 96 miesiącach wyniosło $100000 \times (1+r_m)^{96} - N \times (1+(1+r_m)+\cdots+(1+r_m)^{95}) = 100000 \times (1+r_m)^{96} - N \times \frac{(1+r_m)^{96}-1}{r_m} = 26826,19$ zaś zadłużenie B to $2/10 \times 100000 = 20000$. Pan A zapłacił w 97 racie r_m odsetek od długu po 96 spłacie, czyli $(0.08/12 \times 26826,19 = 178,84$. Stąd 97 rata kapitałowa wyniosła $N - 178,84 = 1213,28 - 178,84 = 1034,44$. Natomiast pan B płacił odsetki od kapitału, który malał w postępie arytmetycznym:dług po 96 racie wynosił 20000, zaś po 107 racie w ostatnim miesiącu 9 roku wyniósł $(1-107/120) \times 100000$. Raty odsetkowe tworzyły więc również malejacy ciąg arytmetyczny. Było ich 12, rata 97 wyniosła $0,08/12 \times 20000$ zaś 108 wyniosła $0,08/12 \times (1-107/120) \times 100000$. Czyli ich suma to $12/2 \times (0,08/12) \times (20000 + 13/120 \times 100000) = 1233,33$. c) Pewien majętny pan złożył na konto oprocentowane $NPS = 3,6\%$ milion zł, po czym pobierał co miesiąc z dołu stałą kwotę k, zanimby nie powstał debet. Jak długo mógł ją pobierać jeśli $k = 3000$, a jak długo jeśli $k = 6000$. Ile mu zostało na koncie w chwili ostatniej wypłaty? Odp. Ponieważ miesięczna stopa procentowa to $0,036/12 = 0,003$ i $0,003 \times 1000 = 3000$ zatem mógł pobiera 3000 nieograniczony czas. W drugim przypadku oznaczmy n liczbę miesięcy, przez które mógł wypłacać 6000. Stan konta po n-tej wypłacie to $1000000 \times 1,003^n - 6000 \times (1+1,003+\cdots+1,003^{n-1}) = 1000000 \times 1,003^n - (1,003^n - 1) \times 6000/0,003$. Musimy rozwiązać więc nierówność $1000000 \times 1,003^n - (1,003^n - 1) \times 6000/0,003 \geq 0 \Leftrightarrow 1/2 \times 1,003^n \geq 1,003^n - 1 \Leftrightarrow 2 \geq 1,003^n \Leftrightarrow \log_{1,003} 2 \geq n$. Ponieważ $\log_{1,003} 2 = \ln 2/\ln 1,003 = 231,4$ zatem mógł wypłacać przez 231 miesięcy czyli 19 lat i 3 miesiące. Zostało mu na koncie po 231 miesiącu $1000000 \times 1,003^{231} - (1,003^{231} - 1) \times 6000/0,003 = 2367,81$.

4. Wycena obligacji i projektów inwestycyjnych na podstawie PV. Immunizacja portfela obligacji. a) Na rynku są obligacje czteroletnie o nominale 1000 zł, które po 2 latach wypłacają kupon 10% a po następnych 2 nominał +10%. Obliczyć ile można za taką obligację zapłacić jeśli rynkowa stopa wynosi $r = 6\%$. Obliczyć durację tych obligacji. Objaśnić sens tej liczby.

Oprócz tego na rynku są bezkuponowe obligacje o terminie wykupu 2 lata. Za ile trzeba zakupić obligacji każdego rodzaju aby immunizować płatność miliona zł za 3 lata. Opłacalna cena to $PV = 100 \times 1,06^{-2} + 1100 \times 1,06^{-4} = 960,30$. Ponieważ obligacja wypłaca po 2 latach 100 i po 4 latach 1100 zatem jej duracja to $(2 \times 100 \times 1,06{-}2 + 1100 \times 4 \times 1,06^{-4})/PV = 3,81$. Oznacza to, że jeśli stopa procentowa wzrośnie o $1,06\%$ do $7,06\%$ to wartość portfela tych obligacji spadnie o około $3,81\%$

Oznaczmy k udział obligacji czteroletnich, zaś l udział dwuletnich, czyli

$k + l = 1$. Musimy wykupić łącznie obligacji za zaktualizowany na dziś milion, czyli za $1,06^{-3} \times 1000000 = 839619,28$. Duracja portfela ma wynieść $3 = k \times 3,81 + l \times 2 = k \times 3,81 + (1-k) \times 2 \Leftrightarrow 1 = 1,81k \Leftrightarrow k = 0,552$. czyli musimy kupić czterolatek za $0,552 \times 839619,28 = 463878,06$ zaś dwulatek za resztę z $839619,28$ czyli za $375741,22$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Założyłem konto 15 grudnia 2012 roku, i wpłaciłem na nie 3000 zł. W dniu 20 grudnia podjąłem 5000 zł, następnie 10 stycznia 2013 wpłaciłem 7000 i nie wykonywałem żadnych operacji do końca miesiąca. Jaki był stan mojego konta 1 lutego, jeśli w 2012 stopa procentowa od salda nieujemnego wynosiła 4% zaś w 2013 wyniosła 3%. Oprocentowanie debetu wynosi stale 15%. Operacje księguje się z dniem następnym, kapitalizacja odsetek następuje z końcem miesiąca, przy czym uwzględnia się dokładną liczbę dni w roku.

2. Stopy inflacji w pewnym kraju wynosiły w 3 kolejnych latach : 5%, 8%, 12%. jaka była średnia stopa inflacji w tych latach? W trzecim roku oprocentowanie lokat wyniosło 15%. Jaka była realna stopa lokat z kapitalizacją roczną ?

3. NSP=10%. Ile wynosi stopa efektywna przy kapitalizacji a) kwartalnej, b) półrocznej c) miesięcznej d) ciągłej. Ile wynosi stopa efektywna po opodatkowaniu odsetek podatkiem 19% naliczanym w momentach kapitalizacji a ile jeśli jest on naliczany z końcem roku.

Rozważamy zaciągnięcie kredytu 200000 zł przy $NSP = 8\%$ z kapitalizacją kwartalną na 10 lat. Ile wyniosą raty całkowite przy spłacaniu ratami równymi z dołu co kwartał. Ile wyniesie dług po 5 latach trwania kredytu. Ile wyniesie 21 rata odsetkowa a ile kapitałowa. Jeśli spłacałbym równymi ratami kapitałowymi to ile łącznie odsetek wpłaciłbym w ostatnim roku trwania kredytu.

4. Weksel z terminem za 10 dni opiewa na 10000 zł. Zamieniono go na 2 weksle, pierwszy w nominale 5000 zł płatny za 20 dni i drugi spłacający resztę należności za 30 dni. jaki był nominał drugiego weksla jeśli stosowano stopę dyskonta $d = 10\%$ przy 360 dniowym roku handlowym.

5. Obligację dwuletnią o nominale 1000 zł wypłacające kupon 5% po 1 roku i nominał + 5% w drugim kupiono na giełdzie w pół roku od emisji. Ile zapłacił kupujący jeśli zastosował 7% stopę do szacowania. Ile wynosiła jej duracja (od chwili zakupu, nie emisji). Podać interpretację tej liczby. Obligacje te posłużyły do stworzenia portfela zabezpieczającego płatność 1000000 zł za 2 lata . Drugim składnikiem były obligacje bezkuponowe o terminie wykupu za 3 lata. Za ile kupiono poszczególnych rodzajów obligacji?

Odpowiedzi

1. Stan konta w grudniu wynosił przez 5 dni 3000 zł, przez 11 dni

-2000 zł (debet) czyli odsetki za grudzień wyniosły $3000 \times 5/366 \times 0,04 + (-2000) \times 11/366 \times 0,15 = -7.38$. Czyli z początkiem stycznia miałem po kapitalizacji na koncie $(-2000) - 7,38 = (-2007,38)$ zł. W styczniu miałem na koncie przez 10 dni $(-2007,38)$ zł, następnie przez 21 dni $(-2007,38) + 7000 = 4992,62$ zł. Z tego tytułu narosły odsetki $(-2007,38) \times 10/365 \times 0,15 + 4992,62 \times 21/365 \times 0,03 = 0,37$. czyli w luty wszedłem z kwotą $4992,62 + 0,37 = 4992,99$ zł na koncie.

2. Średnia stopa inflacji wyniosła $\sqrt[3]{1,05 \times 1,08 \times 1,12} - 1 = 0,08295$ czyli ok. $8,3\%$. W trzecim roku realna stopa lokat rocznych wyniosła $(1,15/1,12) - 1 = 0,0268$ czyli $2,7\%$.

3. Przy kwartalnej: bez podatku $(1 + 0,1/4)^4 - 1 = 0,1038 = 10,38\%$, co przy opodatkowaniu z końcem roku da $(1 - 0,19) \times 0,1038 = 0,084$. przy opodatkowaniu co kwartał: $(1 + 0,1/4 \times 0,81)^4 - 1 = 0,0835 = 8,35\%$. Dla półrocznej b.p. $(1+0,1/2)^2 - 1 = 0,1025 = 10,25\%$, z pod. $0,81 \times 0,1025 = 0,083025 = 8,3025\%$, podatek w chwili kapitalizacji: $(1+0,1/2 \times 0,81)^2 - 1 = 0,08264$. Przy miesięcznej b.p. $(1+0,1/12)^{12} - 1 = 0,1047 = 10,47\%$ z pod. $0,1047 \times 0,81 = 0,0848 = 8,48\%$; podatek co miesiąc $(1+0,1/12 \times 0,81)^{12} - 1 = 0,0841 = 8,41\%$. Przy ciągłej b.p. $e^{0,1} - 1 = 0,10517 = 10,52\%$, po opodatkowaniu $0,81 \times 0,10517 = 0,08519$; przy opodatkowaniu ciągłym $e^{0,1 \times 0,81} - 1 = 0,08437 = 8,437\%$.

Równą ratę kredytu możemy policzyć ze wzoru $N = \frac{K \times (1+r_k)^n \times r_k}{(1+r_k)^n - 1}$, gdzie K oznacza dług początkowy, r_k – stopę dla okresu kapitalizacji, n – liczbę rat. W naszym przypadku $K = 200000$, $r_k = 0,08/4 = 0,02$, $n = 10 \times 4 = 40$. stąd $N = 7311,1496$. Dług po pięciu latach wyniósł $K \times 1,02^{20} - N \times (1,02^20 - 1)/0,02 = 119547,77$. Zatem 21 rata odsetkowa to $119547,77 \times 0,02 = 2390,96$ a rata kapitałowa to $7311,15 - 2390,96 = 4920,19$ zł. Przy równych ratach kapitałowych dług po 9 roku wyniesie 1/10 początkowego, czyli 20000 i w kolejnych kwartałach 15000 zł, 10000 zł, 5000 zł. Odsetki z tytułu tego zadłużenia wyniosą łącznie $0,02 \times (20000 + 15000 + 10000 + 5000) = 1000$ zł (można było również zastosować wzór na sumę szeregu arytmetycznego).

4. Wartość weksla w dniu wymiany to $10000 \times (1 - 10/360 \times d) = 10000 \times (1 - 10/360 \times 0,1)$, gdzie d oznacza stopę dyskonta. Ma być ona równa łącznej wartości 2 weksli czyli $5000 \times (1 - 20/360 \times 0,1) + x \times (1 - 30/360 \times 0,1)$. Dostajemy równanie $10000 \times (1 - 10/360 \times 0,1) = 5000 \times (1 - 20/360 \times 0,1) + x \times (1 - 30/360 \times 0,1)$. Rozwiązując je otrzymujemy $5000 = 357/360 \times x$ czyli $x = (5000 \times 360)/357 = 5042,02$, 5042 zł i 2 grosze.

5. Obligacja po 1/2 roku wypłaci nam 50 zł i po 1,5 roku kwotę 1050. Obliczamy PV obligacji: $PV = 50 \times (1,07)^{-0,5} + 1050 \times 1,07^{-1,5} = 997$. Obliczamy durację $\delta_1 = (0,5 \times 50 \times (1,07)^{-0,5} + 1,5 \times 1050 \times 1,07^{-1,5})/PV =$

$0,5\times 50\times(1,07)^{-0,5}+1,5\times 1050\times 1,07^{-1,5})/997=1,45$. Oznacza to, że przy wzroście stopy procentowej o około 1% czyli do 8% wartość obligacji spadnie o około $1,45\%$. Duracja drugiej obligacji wynosi 3. Stąd jeśli udział kwotowy obligacji pierwszego rodzaju oznaczymy k a drugiego rodzaju l $(k+l=1)$ to otrzymamy równanie na łączną durację portfela :$2=\delta=k\times\delta_1+l\times\delta_2$ czyli $2=k\times 1,45+l\times 3$. Stąd $2=k\times 1,45+(1-k)\times 3\Leftrightarrow 1=k\times 1,55\Leftrightarrow k=0,645$. Kupić należy obligacji pierwszego rodzaju za $0,645\times 1000000\times 1,07^{-2}=563508,86$ zł, drugiego rodzaju za $(1-0,645)\times 1000000\times 1,07^{-2}=310070,75$ zł.

Zadania przygotowujące do drugiego kolokwium

1. Na rynku są obligacje A – dwuletnie bezkuponowe *al pari*, B – dwuletnie z kuponem 6% po pierwszym roku i spłatą nominału +6% po 2 roku oraz C – trzyletnie z kuponem 5% po 1 i po 2 roku i spłatą nominału +5% po 3 roku. Nominał każdej z obligacji to 1000 zł, zaś ich ceny to: $c_A=857,41$, $c_B=964,93$, $c_C=893,42$. Wyznaczyć stopy procentowe *forward* $r_{0,1},r_{1,2},r_{2,3}$. Odp. Czynniki aktualizujące to $\alpha_0^1=\frac{1}{1+r_{0,1}}$, $\alpha_0^2=\frac{1}{(1+r_{0,1})(1+r_{1,2})}$, $\alpha_0^3=\frac{1}{(1+r_{0,1})(1+r_{1,2})(1+r_{2,3})}$. Ceny spełniają równości $c_A=1000\times\alpha_0^1$, $c_B=60\times\alpha_0^1+1050\times\alpha_0^2$, $c_C=50\times\alpha_0^1+50\times\alpha_0^2+1050\times\alpha_0^3$. Oznaczmy dla wygody $\alpha_0^1=x,\alpha_0^2=y,\alpha_0^3=z$. Mamy układ równań: $1000y=857,41$; $60x+1060y=964,93$; $50x+50y+1050z=893,42$. Rozwiązując ten układ otrzymujemy: $y=857,41/1000=0,8574$; $x=(964,93-1060\times 0,85741)/60=0,9346$; $z=(893,42-50\times 0,9346-50\times 0,8574)/1050=0,76554$. Stąd $r_{0,1}=1/x-1=0,07$, $r_{1,2}=x/y-1=0,09$, $r_{2,3}=y/z-1=0,12$.

2. Bank oferuje kredyt na następujących zasadach: NSP =10%, spłata przy równych rocznych ratach kapitałowych, opłata za rozpatrzenie wniosku 100 zł, oprócz tego spłacając należy do każdej raty doliczyć 1% ubezpieczenia za każdy rok do pełnej spłaty od pozostałego zadłużenia. Obliczyć rzeczywisty koszt kredytu w wysokości 5000 zł, który kredytobiorca wziął na 2 lata. Odp. Rzeczywisty koszt kredytu to IRR z uwzględnieniem wszystkich opłat. Z warunków wynika, że kredytobiorca otrzyma na początku 5000- opłata - ubezpieczenie$=5000-100-2\times 0,01\times 5000=4800$. Na koniec pierwszego roku zapłaci $0,1\times 5000$ odsetek $+$ 2500 raty kapitałowej $+$ $2500\times 0,01$ ubezpieczenia$=3025$, na koniec drugiego roku zapłaci $2500\times 0,1$ odsetek$+$ $2500=2750$ kapitału. Jeżeli oznaczymy koszt kapitału przez k, zaś przez $x=1/(1+k)$ to otrzymamy równanie: $4800-3025x-2750x^2=0$. Rozwiązujemy trójmian kwadratowy: $\sqrt{\Delta}=\sqrt{(-3025)^2-4\times(-2750)\times 4800}=7870,87$. Stąd mamy dwa pierwiastki, z których tylko $x_1=0,88$ odpowiada dodatniej stopie $k=1/0,88-1=0,136=13,6\%$ będącej kosztem kredytu.

Obliczyć to samo dla kredytu płatnego w 2 ratach co pół roku.

3. Obliczyć wartość akcji, która na koniec roku da 100 zł dywidendy. Dywidendy będą następnie rosły w tempie 1% rocznie przez 20 lat poczym ustabilizują się. Stopa szacowania wynosi 10%. Odp. Wartość zaktualizowana na dziś strumienia dywidend przez 21 pierwszych lat wyniesie: $100/1,1+100\times 1,01/(1,1^2)+\cdots+100\times 1,01^{20}/(1,1^{21}) = 100/1,1\times(1+(1,01/1,1)+(1,01/1,1)^2+\dots(1,01/1,1)^{20} = 100/1,1\times((1,01/1,1)^{21}-1)/(1,01/1,1-1) = 926,07$. Pozostałe dywidendy, wypłacane od końca 22 roku do ∞ zaktualizowane na dziś mają wartość: $100\times 1,01^{20}\times(1/1,1^{22}+1/1,1^{23}+\cdots = 100\times 1,01^{20}\times 1,1^{-22}\times 1/(1-1/1,1) = 164,88$. Czyli razem akcja jest warta $926,07+164,88 = 1090,95$.

4.Rozważamy przedsięwzięcie, które, po zainwestowaniu 106840 da po pierwszym roku 20000, a w następnych latach 4 latach 30000, 35000, 40000 i 20000.

a) Określić opłacalność tego przedsięwzięcia przy pomocy kryterium NPV przy $r = 0,1$

b)Znaleźć IRR tego przedsięwzięcia z dokładnością do $0,25\%$.

Odp. a) Przepływy finansowe w kolejnych latach to $F_0 = -106840$, $F_1 = 20000$, $F_2 = 30000$, $F_3 = 35000$, $F_4 = 40000$ i $F_5 = 20000$. Warunek opłacalności to $NPV > 0$. Mamy $NPV = F_0 + F_1/(1+r) + F_2/(1+r)^2 + F_3/(1+r)^3 + F_4/(1+4)^4 + F_5/(1+r)^5$. Podstawiając $r = 0,1$ otrzymujemy $NPV = 2170,19 > 0$, zatem przedsięwzięcie jest opłacalne.

b) IRR to dodatni pierwiastek równania $NPV(r) = 0$. Wiemy już z a), że $NPV(0,1) > 0$. Jeśli podstawimy $r = 0,11$ otrzymamy $NPV(0,11) = -663,35$. Zatem $0,1 < IRR < 0,11$. Zastosujmy metodę bisekcji przedziału, w którym leży IRR. Dla $r = 0,105$ mamy $NPV = 739,13$. Zatem $IRR \in (0,105; 0,11)$. Z dokładnością do $0,25\%$ możemy przyjąć $IRR = 0,1075 = 10,75\%$.

5. Pan A postanowił z końcem każdego miesiąca odkładać na koncie stałą kwotę S przez 30 lat, aby następnie, też z końcem każdego miesiąca pobierać 2000 zł przez 20 lat. $NPS = 4,8\%$, kapitalizacja jest comiesięczna. Obliczyć S.

Odp. Obliczmy najpierw wielkość funduszu F, który musi zgromadzić pan A przez 30 lat. Będzie korzystał z niego przez 240 miesięcy, stopa miesięczna $r = 0,048/12 = 0,004$. Czyli $F = (1,004)^{-1}\times 2000 + (1,004)^{-2}\times 2000 + \cdots + (1,004)^{-240}\times 2000 = 2000\times 1,004^{-1}(1,004^{-240}-1)/(1,004^{-1}-1) = 308186,06$. Zgromadzi ten fundusz przez 30 lat czyli 360 miesięcy odkładając co miesiąc S zł. Czyli $F = S\times 1,004^{359} + S\times 1,004^{358} + \cdots + S = S\times(1,004^{360}-1)/0,04$. Stąd $S = F/(1,004^{360}-1)\times 0,004 = 384,20$. Będzie musiał odkładać po 384 zł i 20 groszy.