Kilka ćwiczeń

16 listopada 2013

1. Niech w $\mathbb{R}^2$ będą zadane bazy $\mathcal{A} = \{(1,3),(2,7)\}$, $\mathcal{B} = \{(2,1),(5,3)\}$ zaś w $\mathbb{R}^3$ bazy $\mathcal{C} = \{(1,1,0),(1,2,0),(1,1,1)\}$, $\mathcal{D} = \{(0,1,1),(1,1,1),(1,1,2)\}$. Ponadto st będzie oznaczać odpowiednią bazę standardową w $\mathbb{R}^n$

a) Znaleźć macierze zamiany współrzędnych $M(id)^{st}_{\mathcal{A}}$, $M(id)^{\mathcal{A}}_{st}$, $M(id)^{st}_{\mathcal{B}}$, $M(id)^{\mathcal{B}}_{st}$, $M(id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$,$M(id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$, $M(id)^{st}_{\mathcal{C}}$, $M(id)^{\mathcal{C}}_{st}$, $M(id)^{st}_{\mathcal{D}}$, $M(id)^{\mathcal{D}}_{st}$, $M(id)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$, $M(id)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}$.

b) Niech wektor $v \in \mathbb{R}^2$ ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne $3, 2$. Niech przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane macierzą $M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ Zaś przekształcenie $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane przez $M(\psi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Korzystając z obliczonych w a) macierzy wyznaczyć współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}$, macierz $M(\psi \circ \phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}}$, wzór na ϕ, obliczyć wektor $\psi(v)$

c) $\mathcal{F}$ jest pewną bazą w $\mathbb{R}^2$, dla której $M(id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć bazę $\mathcal{F}$.

d) $\mathcal{G}$ jest pewną bazą w $\mathbb{R}^2$, dla której $M(id)^{\mathcal{G}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć bazę $\mathcal{G}$.

2. Obliczyć macierze odwrotne do macierzy: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Obliczyć $\det(C^8 (C^\top)^{-6})$

Odpowiedzi. a) Oznaczmy $A = M(id)^{st}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, , $B = M(id)^{st}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = M(id)^{st}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = M(id)^{st}_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Wtedy $M(id)^{\mathcal{A}}_{st} = A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$,$M(id)^{\mathcal{B}}_{st} = B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

$M(id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = B^{-1}A = \begin{bmatrix} -12 & -29 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, $M(id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 12 & 29 \\ -5 & -12 \end{bmatrix}$,
$M(id)^{\mathcal{C}}_{st} = C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M(id)^{\mathcal{D}}_{st} = D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,
$M(id)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} = D^{-1}C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $M(id)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} = C^{-1}D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
b) z a) możemy obliczyć $M(\psi \circ \phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}} = M(\psi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \cdot M(id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \cdot M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} \cdot M(id)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} =$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & -29 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 & -123 & -147 \\ 140 & -174 & -208 \end{bmatrix}$.
Celem wyznaczenia wzoru na ϕ obliczymy
$M(\phi)^{st}_{st} = M(id)^{st}_{\mathcal{A}} \cdot M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} \cdot M(id)^{\mathcal{C}}_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 11 & -6 & 1 \\ 38 & -21 & 4 \end{bmatrix}$. Stąd odczytujemy wzór
$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (11x_1 - 6x_2 + x_3, 38x_1 - 21x_2 + 4x_3)$. Kolumnę współrzędnych wektora v w bazie $\mathcal{B}$ obliczymy wykonując mnożenie $M(id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} -12 & -29 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -94 \\ 39 \end{bmatrix}$. Stąd kolumna współrzędnych w bazie $\mathcal{A}$ wektora $\psi(v)$ to $M(\psi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} -94 \\ 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -94 \\ 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -133 \\ -188 \end{bmatrix}$. Stąd kolumna współrzędnych w bazie standardowej wektora $\psi(v)$ to
$M(id)^{st}_{\mathcal{A}} \cdot \begin{bmatrix} -133 \\ -188 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -133 \\ -188 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -509 \\ -1715 \end{bmatrix}$. Czyli $\psi(v) = (-509, -1715)$.

c) Mamy $M(id)^{st}_{\mathcal{F}} = M(id)^{st}_{\mathcal{B}} \cdot M(id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 7 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$.
Zatem $\mathcal{F}$ składa się z wektorów $(19, 11)$ i $(7, 4)$.

d) Zachodzi $M(id)^{st}_{\mathcal{G}} = M(id)^{st}_{\mathcal{A}} \cdot M(id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{G}} = M(id)^{st}_{\mathcal{A}} \cdot (M(id)^{\mathcal{G}}_{\mathcal{A}})^{-1} =$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 18 & -11 \end{bmatrix}$. Zatem baza $\mathcal{G}$ składa się z wektorów $(5, 18)$ i $(-3, -11)$.

2. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$,
$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/4 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$. $\det(C^8(C^\top)^{-6}) = 16$