Ćwiczenia i pytania do 4. wykładu

23 października 2009

1. Określić kiedy przekształcenie $f : V \to W$, gdzie V, W są pewnymi przestrzeniami liniowymi, jest przekształceniem liniowym.

2. Które z poniższych wzorów opisują przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

a) $f((x_1, x_2)) = (1, 2)$

b) $f((x_1, x_2)) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)$

c) $f((x_1, x_2)) = (1 + x_1, -x_2)$

d)$f((x_1, x_2)) = (x_1^2, x_2)$

3. Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, czym jest $f(\mathbf{0})$?

4.a) Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, zaś $v_1, \ldots, v_k$ liniowo zależnym układem wektorów z przestrzeni V. Czy układ $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ jest też liniowo zależny? b) Sprawdzić na przykładzie przekształcenia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowanego wzorem $g(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ i wektorów $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$, że przekształcenie liniowe może przeprowadzić układ liniowo niezależny na liniowo zależny. Jaki dodatkowy warunek wystarcza, aby przekształcenie liniowe zachowało liniową niezależność wektorów?

5. a) Zadano przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3)$. Znaleźć macierz $M(f)_{st}^{st}$, gdzie st oznacza bazę standardową odpowiednio w $\mathbb{R}^3$, bądź w $\mathbb{R}^2$.

b) Zadana jest $M(g)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Podać wzór na $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

6. Zadane jest przekształcenie liniowe $f : V \to W$, gdzie V, W sa przestrzeniami liniowymi. W V określono bazę $\mathcal{B}$ oraz w W bazę $\mathcal{C}$.

a) Jak zmieni się macierz $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, jeśli w $\mathcal{B}$ zamienimy miejscami dwa wektory?

b) Jak zmieni się macierz $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, jeśli w $\mathcal{B}$ jeden z wektorów pomnożymy przez 2?

c) Rozważyć podobne modyfikacje bazy $\mathcal{C}$.