Ćwiczenia i pytania do 3. wykładu

17 października 2013

1. Sformułować definicje liniowo zależnego oraz liniowo niezależnego układu wektorów.

2. Rozstrzygnąć, czy poniższe układy wektorów są liniowo niezależne:
a) układ złożony z jednego wektora $(1, 2, 3)$ w $\mathbb{R}^3$
b) układ złożony z jednego wektora $(0, 0, 0)$ w $\mathbb{R}^3$
c) układ trzech wektorów $(1, 2, 3), (1, 1, 1), (0, 0, 0)$ w $\mathbb{R}^3$
d) układ trzech wektorów $(1, 2, 3), (1, 1, 0), (5, 0, 0)$ w $\mathbb{R}^3$

3. Sformułować definicję bazy oraz wymiaru przestrzeni liniowej .

4. Ile różnych baz ma przestrzeń V jeśli $dimV > 0$?

5. Które z poniższych układów wektorów $\mathbb{R}^3$ są bazami $\mathbb{R}^3$, z których z nich można wybrać bazę, które zaś można uzupełnić do bazy $\mathbb{R}^3$.
a) $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$
b) $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (2, 2, 2), v_4 = (5, 0, 0)$
c) $w_1 = (1, 0, 3), w_2 = (1, 1, 1)$

6. Jaki jest wymiar podprzestrzeni liniowej opisanej układem równań liniowych jednorodnych w przestrzeni $\mathbb{R}^7$, jeśli w rozwiązaniu ogólnym wystąpiły dokładnie 3 zmienne zależne?

7. Podać bazę podprzestrzeni $\mathbb{R}^5$ opisanej układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

8.Znaleźć współrzędne wektora $w = (1, 1, 2)$ w bazie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożonej z wektorów jednostkowych $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$. Znaleźć współrzędne w w bazie złożonej z wektorów $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)$. Jak zmienią się te współrzędne jeśli a) v_1 zamienimy z v_2 miejscami b) v_1 zastąpimy przez $v_1' = 2v_1$ (nie zmieniając pozostałych wektorów).

9. Sprawdzić, że wektor $(1, 1, 0, -2)$ należy do podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ opisanej równaniem $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Uzupełnić ten wektor innymi wektorami V do bazy V.

Odpowiedzi do niektórych pytań.

2. a)lin. niezależny b) lin. zależny (układ złożony z jednego wektora v jest liniowo zależny $\Leftrightarrow$ v jest wektorem zerowym) c) lin. zależny (bo zawiera wektor zerowy) d) lin. niezależny (widać jak się je ustawi w odwrotnej kolejności)

4. Nieskończenie wiele.

5. a) tak (baza standardowa) b) nie, $\dim\mathbb{R}^3 = 3$ zatem układ z czterech wektorów jest na pewno liniowo zależny, za to można wybrać bazę, np.v_1, v_2, v_4 c)nie, dwa wektory na pewno nie rozepną przestrzeni trójwymiarowej, w_1, w_2 są jednak liniowo niezależne, można je więc uzupełnić do bazy, np. wektorem $(0, 1, 0)$.

6. $\dim V = 7 - 3 = 4$,

7. Stosując standardową metodę otrzymujemy bazę
$(-4, 1, 0, 0, 0), (-3, 0, -2, 1, 0), (-2, 0, -2, 0, 1)$.

8. W bazie standardowej współrzędne w są $1, 1, 2$, ponieważ $w = 2v_1 - v_2$ zatem jego współrzędne w drugiej bazie są $2, -1, 0$

9. Uzupełniającymi wektorami mogą być $(1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0)$ ($\dim V = 3$)