Ćwiczenia i pytania do 2. wykładu

9 października 2009

1. Podać definicję przestrzeni liniowej.

2. Oznaczymy przez V zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i wprowadzimy w nim jako działanie dodawania zwykłe dodawanie liczb rzeczywistych oraz zdefiniujmy działanie mnożenia przez skalar równością $\alpha v = 0$, dla $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, że zbiór V z tak określonymi działaniami spełnia wszystkie aksjomaty przestrzeni liniowej za wyjątkiem ostatniego.

3. Podać definicję podprzestrzeni przestrzeni liniowej.

4. Sprawdzić, że jeśli V i U są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej W, to również ich przecięcie $V \cap U$ jest podprzestrzenią W.

5. Podać przykład dwóch podprzestrzeni V i U przestrzeni $\mathbb{R}^2$, których suma $V \cup U$ nie jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$.

6. Poniżej określono pewne podzbiory A_i przestrzeni $\mathbb{R}^2$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Zbadać, które z nich spełniają warunek: $\forall v, w \in A_i : v + w \in A_i$ (tzn. suma wektorów z A_i jest też wektorem z A_i), które warunek: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in A_i : \alpha v \in A_i$ (tzn. iloczyn wektora z A_i przez dowolny skalar też należy do A_i) , które zaś są podprzestrzeniami $\mathbb{R}^2$:

a) $A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$

b) $A_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$

c) $A_3 = \{(t, 3t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$

d) $A_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2$ są liczbami całkowitymi$\}$.

7. Dla jakiej wartości $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = t\}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$?

8. Jakiego typu układy równań liniowych opisują podprzestrzenie liniowe w $\mathbb{R}^n$?

9.Podać geometryczny opis podprzestrzeni przestrzeni liniowych $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^3$

10. Podać definicję kombinacji liniowej wektorów.

11. Obliczyć kombinacje liniowe wektorów $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ ze współczynnikami $\alpha_1, \alpha_2\alpha_3$, jeśli $v_1 = (1, 2, 1, -1), v_2 = (2, 2, 3, 1), v_3 = (0, -1, 2, 4)$ oraz $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 2$.

12. Który z wektorów $w_1 = (1, 2, 3), w_2 = (2, 1, 0)$ należy do $lin((1, 1, 0), (2, 0, 0))$