

Ćwiczenia i pytania do 10. wykładu

Mirosław Sobolewski

8 grudnia 2009

1. Podać definicję iloczynu skalarnego w \mathbb{R}^n (standardowego).
2. a) Podać definicję prostopadłości wektorów oraz długości wektora.
b) Niech $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0, -1)$, $v_3 = (0, 1, 2, 0)$. Które z tych wektorów są prostopadłe? Obliczyć długości tych wektorów.
c) Czy prostopadłość wektorów jest relacją symetryczną? Przechodnią? Zwrotną? Podać odpowiednie przykłady.
4. Sprawdzić prawdziwość twierdzenia Pitagorasa w \mathbb{R}^n : Jeśli $v, w \in \mathbb{R}^n$ i $v \perp w$ to $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. Wywnioskować stąd, że jeśli $v \perp w$ to $\|v + w\| \geq \max(\|v\|, \|w\|)$
6. Podać definicję dopełnienia ortogonalnego V^\perp przestrzeni $V \subset \mathbb{R}^n$.
7. Niech $V \subset \mathbb{R}^{10}$ będzie podprzestrzenią, $\dim V = 4$. Ile wynosi $\dim V^\perp$?
8. Podać definicję bazy ortogonalnej i ortonormalnej. Sprawdzić, że wektory $(1, 2, 1)$, $(2, -2, 2)$, $(-1, 0, 1)$ tworzą bazę ortogonalną \mathbb{R}^3 . Unormować ją.
9. Podać definicje rzutów i symetrii prostopadłych. Jakie wartości własne mają rzuty i symetrie? Czym są odpowiednie podprzestrzenie własne?
10. Zastosować ortogonalizację Grama – Schmidta do układu wektorów $(0, 2, 0, 0)$, $(3, 4, 0, 0)$, $(1, 2, 1, 3)$ w \mathbb{R}^4 . Unormować powstały układ.