# Egzamin z Algebry (typy zadań)

5 listopada 2008

**Zadanie 1.** W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zadano kolumny $v_1 = [0,1,2,1,1]^T$, $v_2 = [1,-1,0,1,1]^T$, $v_3 = [1,1,4,3,3]^T$, $v_4 = [0,0,1,1,0]^T$, $v_5 = [1,-1,1,1,2,1]^T$. Proszę spośród tych kolumn wybrać bazę przestrzeni $V = lin(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \subset \mathbb{R}^5$, przedstawić pozostałe kolumny jako kombinacje liniowe elementów bazy oraz podać równanie bądź układ równań opisujący $V$. Podać inną bazę $V$ nie zawierającą żadnej z kolumn $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$. Ile elementów mogą zawierać takie bazy? Ile elementów mogą zawierać układy liniowo niezależne w $V$ a ile układy rozpinające $V$?

Rozwiązanie: Pewna modyfikacja znanej metody znajdywania bazy pozwoli zarazem na wyznaczenie układu równań opisującego $V$. Mianowicie, tworzymy macierz, której kolejnymi kolumnami są $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ oraz na końcu dołączamy kolumnę $[x, y, w, u, z]^T$ kolejnych współrzędnych w $\mathbb{R}^5$ otrzymując następującą macierz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & y \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & u \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}$$

, którą operacjami $w_1 \leftrightarrow w_2, w_3 - 2w_1, w_4 - w_1, w_5 - w_1, w_3 - 2w_2, w_4 - 2w_2, w_5 - 2w_2, w_4 - w_3$ doprowadzamy do postaci schodkowej

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & w - 2y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u + y - w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z - y - 2x \end{bmatrix}$$

. Ponieważ ostatnie dwa wiersze macierzy (bez kolumny współrzędnych) są zerowe, zatem, przyrównując do zera dwa ostatnie elementy przekształconej szóstej kolumny otrzymujemy układ równań opisujący $V$ :

$$\begin{cases} u + y - w = 0 \\ z - y - 2x = 0 \end{cases}$$

Można to sprawdzić podstawiając do nich współrzędne kolumn $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$. Następnie macierz (tylko pierwszych pięć kolumn) sprowadzamy do postaci regularnej przekształceniem $w_1 + w_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, z której odczytujemy, że jako wektory bazy $V$ można przyjąć $v_1, v_2, v_4$ oraz, że $v_3 = 2v_1 + v_2, \quad v_5 = v_2 + v_3$ (proszę sprawdzić, że tak jest). Inną bazą może być np $2v_1, 2v_2, 2v_4$. Baz jest nieskończenie wiele, lecz wszystkie muszą mieć tyle samo elementów, czyli w przypadku $V$ trzy. Ponieważ każdy układ liniowo niezależny można uzupełnić do bazy, więc mogą mieć one (w przypadku $V$) najwyżej trzy elementy. Ponieważ z każdego układu rozpinającego $V$ można wybrać bazę $V$ musi on mieć co najmniej trzy elementy. Uwaga: w skrypcie (koniec rozdziału 5) podana jest inna metoda znajdowania układu równań opisujących przestrzeń o danej bazie. Jest ona chyba jednak bardziej uciążliwa rachunkowo i prowadzi do większej liczby równań. Będę ją również akceptował, jak również każdą poprawną metodę.

**Zadanie 2.** Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 - t \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Proszę określić dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ układ jest niesprzeczny. Podać zbiory rozwiązań dla tych wartości parametru.

**Zadanie 3.** Proszę określić rząd poniższej macierzy $A$. Proszę podać bazę podprzestrzeni zerującej $N(A) \subset \mathbb{R}^5$. Jaki jest ogólny związek pomiędzy rzędem macierzy, wymiarem jej przestrzeni zerującej, a rozmiarami macierzy?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: Rozwiązując układ równań $A[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T = [0,0,0,0]^T$ możemy przyjąć jako zmienne wolne $x_4$ i $x_5$, zaś rozwiązania są postaci:

$$x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zatem bazę $N(A)$ tworzą kolumny

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wymiar $N(A)+$ rząd $A$ daje w sumie liczbę kolumn $A$ (podrozdział 3.4 skryptu).

**Zadanie 4.** W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zadano podprzestrzeń $V = lin([1,2,0,1]^T, [2,0,-1,1]^T)$. Proszę podać macierze rzutów prostopadłych na $V$ oraz oraz $V^{\perp}$. Jaki układ równań opisuje $V^{\perp}$?

Macierzą rzutu na $V$ jest $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ zaś macierzą rzutu na $V^{\perp}$ jest $I_4 - P$ gdzie $A$ oznacza macierz , której kolumnami są $[1,2,0,1]^T, [2,0,-1,1]^T$ (skrypt rozdział 5). Układ równań to

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 + (-1)x_3 + 1x_4 = 0 \end{cases}$$

(wypada go uprościć).

**Zadanie 5.** Proszę obliczyć poniższe wyznaczniki:

a)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

b)

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 7 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-3} \right)$$

Przykład a) można policzyć sprowadzając macierz do postaci trójkątnej (proszę przypomnieć sobie, które operacje nie zmieniają wyznacznika). W przykładzie b) na mocy twierdzenia Cauchy'ego szukany wyznacznik wynosi $(1 \times 3 \times 2 \times 2 \times (-1) \times 4)^4 \times (2 \times (-3) \times 1 \times 2 \times 2)^{-3} = -24$.

**Zadanie 6.** a) Proszę rozwiązać układ równań macierzowych, w których $X$ i $Y$ oznaczają niewiadome macierze kwadratowe $n \times n$, zaś $A$, $B$ i $C$ są danymi macierzami tego samego typu, przy czym macierz $A$ jest odwracalna:

$$\begin{cases} A^T X + Y = B \\ YA^{-1} + B^T = C \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $Y = (C - B^T)A$ po wstawieniu do drugiego i rozwiązaniu mamy $X = (A^{-1})^T (B - (C - B^T)A)$

b) Proszę określić czy poniższe działania są wykonalne, jeśli są– wykonać je:

i)

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

ii)

$$2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T =$$

iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^4 =$$

iv)

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

v)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Przykład iv) jest niewykonalny.