2 vs. n wymiarów

Michal R. Przybylek

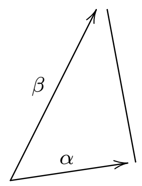
22 października 2013

Streszczenie

Celem tej notki jest pokazanie na prostym przykładzie, że dwuwymiarowe aspekty geometrii Euklidesowej, w dowolnej n-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej zachowują się w dwuwymiarowy sposób.

1 Wstęp

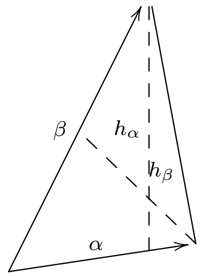
Modelowym przykładem będzie zagadnienie znalezienia punku przecięcia wysokości trójkąta wyznaczonego przez trójkę punktów A, B, C. Ponieważ, jednak, przesunięcia w dowolnej przestrzeni afinicznej są łatwe w realizacji, założymy dalej, że dysponujemy parą liniowo-niezależnych wektorów $\alpha = C - A$ i $\beta = B - A$ rozpinających dwa boki trójkąta.



2 Przypadek 2-wymiarowy

Niech $\alpha = [x', y']$ a $\beta = [x'', y'']$. Ze szkoły średniej wiemy, że wszystkie trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie — wystarczy zatem znaleźć punkt przecięcia dwóch z nich, co zaoszczędzi nam sporo pracy. Niech h_α będzie wysokością opuszczoną na bok α, a h_β na bok β. Każda z tych wysokości wyznacza jednowymiarową przestrzeń afiniczną (tj. prostą).

Przecięcie tych przestrzeni afinicznych (tj. prostych) jest żądanym punktem przecięcia się wysokości.



Przestrzeń wyznaczona przez h_α jest prostopadła do wektora α, stąd jej część liniowa $\alpha^\perp$ spełnia:

$$\{[x,y]\colon \langle [x,y],\alpha\rangle = 0\} = \{[x,y]\colon xx' + yy' = 0\}$$

Ponadto przestrzeń ta przechodzi przez punkt $(x'', y'') = \beta$, a więc, ostatecznie, otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned} \beta + \{[x,y] : xx' + yy' = 0\} &= \\ \{[x + x'', y + y''] : xx' + yy' = 0\} &= \\ \{[x,y] : (x - x'')x' + (y - y'')y' = 0\} & \end{aligned}$$

Podobnie postępując z przestrzenią wyznaczoną przez wysokość h_β dostajemy:

$$\{[x,y]\colon (x - x')x'' + (y - y')y'' = 0\}$$

Rozwiązaniem takiego układu równań jest punkt przecięcia się wysokości trójkąta.

3 Przypadek n-wymiarowy

W przypadku dwuwymiarowym mogliśmy założyć, że wektory α i β mają po dwie współrzędne $[x', y']$ i $[x'', y'']$ odpowiednio. Taka współrzędna $[x', y']$ jest umownym zapisem wektora $x'e_1 + y'e_2$, gdzie e_1, e_2 stanowią (zorientowaną) standardową bazę przestrzeni. Oczywiście w przypadku n-wymiarowej przestrzeni, każdy z wektorów możemy (unikalnie) zapisać jako kombinację liniową n standardowych wektorów bazowych — stąd każdy wektor ma dokładnie n-współrzędnych (np. w przypadku trójwymiarowym: $x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$).

Zauważmy jednak, że bez względu na liczbę wymiarów samej przestrzeni, całe zagadnienie znalezienia punktu przecięcia wysokości, rozgrywa się zawsze i wyłącznie w (dwuwymiarowej) przestrzeni trójkąta, tj. przestrzeni rozpiętej przez wektory α i β. We wstępie założyliśmy, że te wektory są liniowo niezależne, a więc, stanowią one bazę tej dwuwymiarowej przestrzeni — płaszczyzny. Wobec tego, możemy za pomocą nich wprowadzić *nowy* układ współrzędnych związany z samą płaszczyzną — jako, że α i β są bazą płaszczyzny, to *każdy* wektor z tej płaszczyzny unikalnie zapisuje się za pomocą kombinacji liniowej $\dot{x}\alpha + \dot{y}\beta$, którą moglibyśmy umownie oznaczyć $[\dot{x}, \dot{y}]_{\alpha,\beta}$.

Teraz rozwiązanie zadania sprowadza się dokładnie do dwuwymiarowego przypadku[1]. Przestrzeń wyznaczona przez h_α jest prostopadła do wektora α i należy do płaszczyzny, stąd jej część liniowa $\alpha^\perp$ spełnia:

$$\{x\alpha + y\beta \colon \langle x\alpha + y\beta, \alpha\rangle = 0\} = \{x\alpha + y\beta \colon y\langle\alpha, \beta\rangle + x\|\alpha\|^2 = 0\}$$

Ponadto przestrzeń ta przechodzi przez punkt wyznaczony przez koniec wektora β, a więc ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \beta + \{x\alpha + y\beta : y\langle\alpha, \beta\rangle + x\|\alpha\|^2 = 0\} &= \\ \{x\alpha + (y+1)\beta : y\langle\alpha, \beta\rangle + x\|\alpha\|^2 = 0\} &= \\ \{x\alpha + y\beta : (y-1)\langle\alpha, \beta\rangle + x\|\alpha\|^2 = 0\} & \end{aligned}$$

Podobnie postępując z przestrzenią wyznaczoną przez wysokość h_β dostajemy:

$$\{x\alpha + y\beta \colon (x-1)\langle\alpha, \beta\rangle + y\|\beta\|^2 = 0\}$$

Rozwiązaniem takiego układu równań jest punkt przecięcia się wysokości trójkąta w układzie współrzędnych płaszczyzny:

$$\begin{aligned} x &= (\langle\alpha, \beta\rangle - \|\beta\|^2)\frac{\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \beta\rangle^2 - \|\alpha\|^2\|\beta\|^2} \\ y &= (\langle\alpha, \beta\rangle - \|\alpha\|^2)\frac{\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \beta\rangle^2 - \|\alpha\|^2\|\beta\|^2} \end{aligned}$$

[1] Pomijając niestandardową definicję iloczynu skalarnego w układzie płaszczyzny. Aspekty struktury liniowej są zachowane przy przejściu do innej bazy (tj. innego układu współrzędnych), ale struktura iloczynu skalarnego — nie. Dzieje się tak dlatego, że przeszliśmy do bazy, która nie jest ortonormalna, tj. wektory bazowe α i β w ogólności ani nie muszą być do siebie prostopadłe, ani unormowane. Moglibyśmy wprowadzić w tej płaszczyźnie ortonormalny układ współrzędnych — i wtedy wzory z przypadku dwuwymiarowego przeniosły by się *literalnie* — ale konstrukcja takiej bazy wymagała by dodatkowego zachodu i obliczeń, co czyni cały proces nieopłacalnym.

który odpowiada wektorowi:

$$x\alpha + y\beta = (\langle \alpha, \beta \rangle (\alpha + \beta) - \|\beta\|^2 \alpha - \|\alpha\|^2 \beta) \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \beta \rangle^2 - \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2}$$