Elementy geometrii analitycznej

Znajdziemy teraz wzór na odległość punktu (x_0, y_0) od prostej o równaniu $ax + by + c = 0$. Oczywiście po to, by to równanie przedstawiało prostą trzeba założyć, że wektor $\overrightarrow{[a,b]}$

Przypomnijmy, że odległość punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) to $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Wynika to natychmiast z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta o wierzchołkach (x_1, y_1), (x_1, y_2) i (x_2, y_2), którego pionowy bok ma długość $|y_2 - y_1|$ a poziomy — $|x_2 - x_1|$.

Analogicznie w przestrzeni trójwymiarowej odległość punktów (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) jest równa $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. W tym przypadku stosujemy wzór uzyskany dla punktów płaszczyzny dla znalezienia odległości punktów (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_1), a następnie twierdzenie Pitagorasa do trójkąta pionowego o wierzchołkach (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_1) i (x_2, y_2, z_2).

Przypomnimy twierdzenie kosinusów: jeśli a, b, c są bokami trójkąta o wierzchołkach A, B, C (A leży naprzeciw boku a itd.), to

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

— symbol C oznacza jednocześnie wierzchołek i kąt między bokami wychodzącymi z tego wierzchołka. Przypomnimy dowód tego twierdzenia, które można i należy traktować jako uogólnienie twierdzenia Pitagorasa. Niech D oznacza rzut punktu B na prostą AC. Jeśli kąty C i A nie są rozwarte, to punkt D leży na odcinku AC w odległości $b - a\cos C$ od punktu A. Jeśli kąt A jest rozwarty, to punkt D leży w odległości $a\cos C - b$ od punktu A. Wreszcie jeśli kąt C jest rozwarty (tzn. $\cos C < 0$), to punkt D leży w odległości $b + a\cos(\pi - C) = b - a\cos C$ od punktu A. Wobec tego $AD = |b - a\cos C|$ we wszystkich przypadkach. Podobnie we wszystkich przypadkach $BD = a\sin C$. Mamy więc $c^2 = BD^2 + AD^2 = a^2\sin^2 C + |b - a\cos C|^2 = =a^2\sin^2 C + b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Wobec tego $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$. Jeśli $C = \mathbf{0} = (0,0,0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, to $2ab\cos C = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - \big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\big) = 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$, zatem $ab\cos C = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Pora na określenie iloczynu skalarnego.

Definicja iloczynu skalarnego

Iloczynem skalarnym $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ wektorów $\vec{\mathbf{u}} = [u_1, u_2, u_3]$ $\vec{\mathbf{v}} = [v_1, v_2, v_3]$ nazywamy liczbę

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\,. \qquad \blacksquare$$

Z tekstu poprzedzającego definicję wynika jasno, że iloczyn skalarny dwóch wektorów jest równy iloczynowi ich długości i kosinusa kąta między nimi. Jest więc równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z wektorów jest równy $\vec{\mathbf{0}}$ lub, gdy kosinus kąta między nim i jest równy 0, czyli gdy mnożone wektory są prostopadłe. By nie łamać sobie języka przyjmujemy, że wektor zerowy jest prostopadły do każdego wektora. Iloczynowi skalarnemu przysługuje wiele własności algebraicznych, które czynią go wielce użytecznym. Wymienimy najważniejsze z nich.

IS 0. $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}} = [0,0,0)]$;

IS 1. $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}}$ — iloczyn skalarny jest przemienny;

IS 2. $\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}_1+\vec{\mathbf{v}}_2)=\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}_1+\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}_2$ — iloczyn skalarny jest rozdzielny względem dodawania wektorów;

IS 3. $(t\vec{\mathbf{u}})\cdot\vec{\mathbf{v}}=t(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}})=\vec{\mathbf{u}}\cdot(t\vec{\mathbf{v}})$ dla dowolnej liczby $t\in\mathbb{R}$ i dowolnych wektorów $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}$;

IS 4. $s(t\vec{\mathbf{u}})=(st)\vec{\mathbf{u}}$ dla dowolnych $s,t\in\mathbb{R}$ i dowolnego wektora $\vec{\mathbf{u}}$;

IS 5. $(s+t)\vec{\mathbf{u}}=s\vec{\mathbf{u}}+t\vec{\mathbf{u}}$ dla dowolnych $s,t\in\mathbb{R}$ i dowolnego wektora $\vec{\mathbf{u}}$;

IS 6. $|\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}|\le\|\vec{\mathbf{u}}\|\cdot\|\vec{\mathbf{v}}\|$, gdzie $\|\vec{\mathbf{u}}\|:=\sqrt{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}}}$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z wektorów $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}$ jest zerowy lub gdy istnieje liczba t taka, że $\vec{\mathbf{u}}=t\vec{\mathbf{v}}$, ta nierówność nazywana jest nierównością Schwarza, czasem Schwarza–Cauchy'ego.

Oczywiście mnożymy wektor przez liczbę mnożąc każdą współrzędną wektora przez tę liczbę:

$$t\vec{\mathbf{u}}=t\cdot(u_1,u_2,u_3)=(tu_1,tu_2,tu_3)\,.$$

Wszystkie wymienione własności wynikają od razu z definicji działań na wektorach. Jedyny problem to nierówność Schwarza, która wynika natychmiast z geometrycznej interpretacji iloczynu skalarnego i z tego, że $-1\le\cos\alpha\le1$. Można ją też udowodnić nieco inaczej. Podamy dwa takie dowody, oba w nieco ogólniejszej sytuacji.

Pierwszy dowód nierówności Schwarza

Wykażemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $y_1,y_2,\ldots,y_n$ zachodzi nierówność

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\le(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\,.$$

Przenosząc wszystkie wyrażenia na prawą stronę, wymnażając wszystko otrzymujemy sumę iloczynów typu $x_i^2y_j^2$, $1\le i,j\le n$, od której odejmujemy sumę iloczynów postaci $x_i^2y_i^2$, $1\le i\le n$ oraz podwojoną sumę wszystkich iloczynów postaci $x_iy_ix_jy_j$, $1\le i\ne j\le n$. Jasne jest że po odjęciu znikną iloczyny postaci $x_i^2y_i^2$, $1\le i\le n$. Reszta to suma wyrażeń postaci $x_i^2y_j^2-2x_ix_jy_iy_j+x_j^2y_i^2$, $1\le i<j\le n$. Ponieważ $x_i^2y_j^2-2x_ix_jy_iy_j+x_j^2y_i^2=(x_iy_j-x_jy_i)^2$, więc ta suma jest liczbą nieujemną. Załóżmy, że $0=\sum_{1\le i<j\le n}(x_iy_j-x_jy_i)^2$. Wtedy $x_iy_j=x_jy_i$ dla $1\le i<j\le n$. Jeśli $y_i\ne0\ne y_j$, to możemy napisać $\frac{x_i}{y_i}=\frac{x_j}{y_j}$. Wobec tego wszystkie ilorazy postaci $\frac{x_i}{y_i}$ są równe. Oznaczmy ich wspólną wartość przez t. Niech $y_i\ne0=y_j$. Ponieważ $x_iy_j=x_jy_i$, więc $x_j=0$ i wobec tego również w tym przypadku zachodzi wzór $x_j=ty_j$. Wykazaliśmy więc, że jeśli $(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$ i co najmniej jedna z liczb $y_1,y_2,\ldots,y_n$ jest różna od 0, to istnieje liczba rzeczywista t taka, że $x_i=ty_i$ dla $i=1,2,\ldots,n$. Jasne jest, że jeśli taka liczba t istnieje, to nierówność Schwarza staje się równością. W ten sposób zakończyliśmy pierwszy dowód. ■

Drugi dowód nierówności Schwarza, którego nie będzie go na wykładzie.

Jasne jest, że jeśli zdefiniujemy iloczyn skalarny w przestrzeni n–wymiarowej wzorem

$$\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]\cdot[y_1,y_2,\ldots,y_n]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\,,$$

to będą mu przysługiwać własności **IS0** – **IS5**. Załóżmy, że $\vec{\mathbf{y}}\ne\vec{\mathbf{0}}$, tzn., że co najmniej jedna ze współrzędnych wektora $\vec{\mathbf{y}}$ jest różna od 0. Niech

$$f(t)=(\vec{\mathbf{x}}+t\vec{\mathbf{y}})\cdot(\vec{\mathbf{x}}+t\vec{\mathbf{y}})=(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{x}})+t(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}})+t(\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{x}})+t^2(\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{y}})=(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{x}})+2t(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}})+t^2(\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{y}})\,.$$

dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$. Funkcja f jest wielomianem kwadratowym, którego wszystkie wartości są nieujemne, zatem jego wyróżnik nie może być dodatni. Mamy więc

$$0 \geq \Delta = 4(\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}})^2 - 4(\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}})(\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{y}}) = 4\big((\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}})^2 - (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}})(\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{y}})\big),$$

a to oznacza, że nierówność Schwarza jest prawdziwa. Oczywiście jeśli $(\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}})^2 = (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}})(\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{y}})$, to wielomian kwadratowy ma dokładnie jeden pierwiastek (podwójny), a to oznacza, że istnieje liczba rzeczywista t taka, że $0 = f(t) = (\vec{\mathbf{x}} + t\vec{\mathbf{y}}) \cdot (\vec{\mathbf{x}} + t\vec{\mathbf{y}})$, czyli $\vec{\mathbf{x}} = -t\vec{\mathbf{y}}$. Zakończyliśmy drugi dowód nierówności Schwarza. ■

W drugim dowodzie mniej przekształcaliśmy. W dodatku w samym dowodzie korzystaliśmy jedynie z własności **IS0** – **IS5**. Wynika stąd, że jeśli zdefiniujemy iloczyn w jakikolwiek inny sposób, ale tak, że własności **IS0–IS5** będą spełnione, to również własność **IS6** będzie spełniona. Przykład takiej sytuacji możemy bez trudu podać. Można przyjąć, że iloczynem skalarnym wektorów $\overrightarrow{[x_1, x_2]}$ i $\overrightarrow{[y_1, y_2]}$ jest np. liczba $2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$, sens geometryczny jest znacznie mniej oczywisty niż poprzednio i nie będziemy tej kwestii analizować, powiemy tylko, że na płaszczyźnie można wprowadzać układy współrzędnych nieprostokątnych, że jednostki na osiach nie muszą być równej długości. Iloczyny skalarne można też definiować w innych zbiorach, np. zbiorach, których elementami są funkcje.

Pierwszy dowód podaliśmy, by studenci widzieli, że wymyślenie dowodu tak prostej własności jest w ich zasięgu. Drugi, by móc powiedzieć, że po pewnym czasie, ludziom udaje się lepiej zrozumieć uzyskane twierdzenie, często rozszerzyć zakres jego stosowalności i na ogół uprościć dowód. Nie należy się więc dziwić, że na pomysł przeprowadzenia krótkiego dowodu można nie wpaść od razu. Te krótkie rozumowania to często efekt dosyć długich rozmyślań.

Jeśli co najmniej jedna z liczb a, b jest różna od 0, to zbiór wektorów (x, y)* prostopadłych do wektora (a, b) jest opisany równaniem $ax + by = 0$. Oczywiście końce tych wektorów tworzą prostą prostopadłą do wektora (a, b). Wobec tego

Jeśli $(a, b) \neq (0, 0)$, to równanie $ax + by + c = 0$ opisuje prostą prostopadłą do wektora (a, b). Prosta ta jest równoległa do prostej o równaniu $ax + by = 0$.

Jeśli co najmniej jedna z trzech liczb a, b, c jest różna od 0, to równanie $ax + by + cz = 0$ opisuje zbiór wektorów prostopadłych do wektora (a, b, c). Jest więc to równanie płaszczyzny przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Wobec tego

Jeśli $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, to równanie $ax + by + cz + d = 0$ opisuje płaszczyznę prostopadłą do wektora (a, b, c). Płaszczyzna ta jest równoległa do płaszczyzny o równaniu $ax + by + cz = 0$.

Definicja iloczynu wektorowego

Iloczynem wektorowym $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ wektorów $\vec{\mathbf{u}} = [u_1, u_2, u_3)]$ i $\vec{\mathbf{v}} = [v_1, v_2, v_3]$ nazywamy wektor $[u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1]$. ■

Ze względu na to, że iloczyn wektorowy jest często stosowany, wypada wspomnieć, że wielkości

* Mówiąc wektor (x,y) mamy na myśli wektor zaczynający się w punkcie $\mathbf{0}$=(0,0), którego końcem jest punkt (x,y).

postaci $u_1v_2-u_2v_1$ nazywane są wyznacznikami drugiego stopnia. Piszemy $u_1v_2-u_2v_3=\begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}$.
Definiujemy też wyznaczniki wyższych stopni, np. trzeciego:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix} = u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix} =$$

$$= u_1v_2w_3-u_1v_3w_2+u_2v_3w_1-u_2v_1w_3+u_3v_1w_2-u_3v_2w_1\,.$$

O wyznacznikach opowiemy więcej w jednym z następnych wykładów. Teraz zauważmy tylko, że oznaczając $\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ możemy napisać, że

$$\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix} = \mathbf{e}_1\begin{vmatrix} u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix} - \mathbf{e}_2\begin{vmatrix} u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix} + \mathbf{e}_3\begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)$$

W odróżnieniu od iloczynu skalarnego dwóch wektorów, który jest liczbą (czyli skalarem), iloczyn wektorowy jest wektorem. Wykażemy jest jest on wektorem prostopadłym do obu czynników jednocześnie oraz że jego długość to pole równoległoboku rozpiętego przez mnożone wektory. By wykazać prostopadłość wystarczy obliczyć iloczyn skalarny:

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}) = [u_1,u_2,u_3]\cdot[u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_3] =$$

$$= u_1u_2v_3-u_1u_3v_2+u_2u_3v_1-u_2u_1v_3+u_3u_1v_2-u_3u_2v_1=0\,.$$

Równość $\vec{\mathbf{v}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})=\vec{\mathbf{0}}$ sprawdzamy w taki sam sposób. Sprawdzimy najpierw, że **kwadrat** pola równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$ równy jest $(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}})(\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}})-(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^2$. Skorzystamy z tego, że pole równoległoboku jest iloczynem boku przez wysokość do niego prostopadłą. Znajdziemy najpierw taką liczbę $t\in\mathbb{R}$, że wektor $\vec{\mathbf{u}}-t\vec{\mathbf{v}}$ okaże się prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{v}}$. Oznacza to, że wektor $t\vec{\mathbf{v}}$ będzie rzutem wektora $\vec{\mathbf{u}}$ na prostą wyznaczona przez wektor $\vec{\mathbf{v}}$ i wobec tego wektor $\vec{\mathbf{u}}-t\vec{\mathbf{v}}$ będzie wysokością równoległoboku prostopadłą do ,,boku'' $\vec{\mathbf{v}}$. Ma być $\vec{\mathbf{v}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}-t\vec{\mathbf{v}})=0$, czyli $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}}-t\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}=0$. Jeśli $\vec{\mathbf{v}}\neq\vec{\mathbf{0}}$, to $t=\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}$. Niech P oznacza pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$. Mamy $P=\|\vec{\mathbf{v}}\|\cdot\|\vec{\mathbf{u}}-\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{v}}\|$. Wobec tego $P^2=\|\vec{\mathbf{v}}\|^2\cdot\|\vec{\mathbf{u}}-\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{v}}\|^2=\big(\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\big)\big((\vec{\mathbf{u}}-\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{v}})\cdot(\vec{\mathbf{u}}-\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{v}})\big)=$
$=\big(\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\big)\big(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}}-\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}-\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}}+(\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}})^2\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\big)=\big(\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\big)\big(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{u}}-2\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}+(\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}})^2\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\big)=\|\vec{\mathbf{v}}\|^2\|\vec{\mathbf{u}}\|^2-(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^2$.
Wzór wykazaliśmy. Z pierwszego dowodu nierówności Schwarza wynika wzór

$$\|\vec{\mathbf{v}}\|^2\|\vec{\mathbf{u}}\|^2-(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^2=(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_3)=\|\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}\|^2\,.$$

Udowodniliśmy, że kwadrat pola równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}$ równy jest kwadratowi długości iloczynu wektorowego. Możemy otrzymany wzór przepisać w postaci

$$\|\vec{\mathbf{v}}\|^2\|\vec{\mathbf{u}}\|^2=(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^2+\|\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}\|^2\,.$$

Ten wzór to w zasadzie ,,jedynka trygonometryczna''. Jeśli bowiem φ oznacza kąt między $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$, to $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}=\|\vec{\mathbf{u}}\|\cdot\|\vec{\mathbf{v}}\|\cos\varphi$ oraz $\|\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}\|=\|\vec{\mathbf{u}}\|\cdot\|\vec{\mathbf{v}}\|\sin\varphi$, bo pole równoległoboku to iloczyn boków i sinusa kąta między nimi.

Zadania

1. Znaleźć odległość punktów $(\frac{1}{2}, -7)$ i $(\frac{7}{2}, -3)$.

2. Znaleźć odległość punktów $(\frac{1}{2}, -7, -9)$ i $(\frac{7}{2}, -3, 3)$.

3. Znaleźć równanie prostej równoległej do prostej $x - 7y + 5 = 0$ przechodzącej przez punkt $(1, 1)$.

4. Znaleźć odległość punktu $(1, 1)$ od prostej $x - 7y + 5 = 0$.

5. Jaki warunek spełniają liczby a, b, jeśli wektor $[a, b]$ jest prostopadły do wektora $[3, -5]$?

6. Jaki warunek spełniają liczby a, b, c, jeśli wektor $[a, b, c]$ jest prostopadły do wektora $[1, 2, 3]$?

7. Jaki warunek spełniają liczby a, b, c, jeśli wektor $[a, b, c]$ jest prostopadły do wektorów $[1, 2, 3]$ i $[3, 2, 1]$?

8. Czy punkty $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ leżą na jednej prostej?

9. Czy punkty $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$ leżą na jednej prostej?

10. Znaleźć pole trójkąta o wierzchołkach $(3, 5)$, $(5, 8)$ i $(0, 0)$. Czy ten trójkąt jest prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny?

11. Znaleźć pole trójkąta o wierzchołkach $(3, 5, 8)$, $(5, 8, 13)$ i $(0, 0, 0)$.

12. Znaleźć pole trójkąta o wierzchołkach $(-1, 2, 0)$, $(0, 3, 1)$ i $(10, -5, -1)$. Czy ten trójkąt jest prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny?

13. Znaleźć środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $(2, 1)$, $(5, 5)$ i $(1, 8)$? Czy ten trójkąt jest prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny?

14. Znaleźć środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $(2, 1)$, $(3, 5)$ i $(8, 13)$? Czy ten trójkąt jest prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny?

15. Znaleźć punkt przecięcia wysokości trójkąta o wierzchołkach $(2, 1)$, $(3, 5)$ i $(8, 13)$.

16. Znaleźć punkt przecięcia środkowych trójkąta (środek ciężkości) o wierzchołkach $(2, 1)$, $(3, 5)$ i $(8, 13)$.

17. Znaleźć równanie płaszczyzny zawierającej punkty $(3, -1, 2)$, $(0, 2, 1)$ i $(-3, 2, 2)$.

18. Znaleźć równanie płaszczyzny zawierającej punkty $(-1, 2, 0)$, $(0, 3, 1)$ i $(10, -5, -1)$.

19. Znaleźć środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $(-1, 2, 0)$, $(0, 3, 1)$ i $(10, -5, -1)$.

20. Znaleźć punkt przecięcia wysokości trójkąta o wierzchołkach $(-1, 2, 0)$, $(0, 3, 1)$ i $(10, -5, -1)$.

21. Znaleźć punkt przecięcia środkowych trójkąta (środek ciężkości), którego wierzchołkami są punkty $(-1, 2, 0)$, $(0, 3, 1)$ i $(10, -5, -1)$.

22. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $(2, 7, -1)$ i $(4, 1, 2)$ równoległej do wektora $(1, 0, 0)$. Ile jest takich płaszczyzn?

23. Wykazać, że $\vec{\mathbf{x}} \cdot (\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{z}}) = (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}}) \cdot \vec{\mathbf{z}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\vec{\mathbf{x}}$ i $\vec{\mathbf{z}}$ są równoległe albo oba wektory $\vec{\mathbf{x}}$ i $\vec{\mathbf{z}}$ są prostopadłe do wektora $\vec{\mathbf{y}}$.

24. Znaleźć odległość punktu $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ od płaszczyzny $4x - 3y + 12z - 39 = 0$.

25. Znaleźć odległość punktu $A = (-1, 3, 1)$ od płaszczyzny $4x - 3y + 12z - 39 = 0$.

26. Znaleźć punkt X, który dzieli odcinek AB w stosunku:

$1:1$, $\quad 1:3$, $\quad 2:3$, $\quad$ jeśli $A=(1,-2,3)$, $\quad B=(21,-22,-37)$.

27. Znaleźć iloczyn wektorowy $\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}}$ wektorów $\vec{\mathbf{v}}=[1,2,3]$ i $\vec{\mathbf{w}}=[1,-2,3]$.

28. Znaleźć objętość czworościanu, którego wierzchołkami są punkty $A=(1,2,0)$, $B=(4,3,0)$, $C=(1,1,1)$ i $D=(2,3,1)$.

29. Znaleźć środek kuli opisanej na czworościanie o wierzchołkach $A=(1,2,0)$, $B=(4,3,0)$, $C=(1,1,1)$ i $D=(2,3,1)$.

30. Znaleźć kąt między płaszczyznami $2x-y-z-1=0$ i $x+y-2z=0$.