Ułamki proste

Michał R. Przybyłek

28 stycznia 2013

1 Wprowadzenie

Celem tej krótkiej notki jest pokazanie, że dowolna funkcja wymierna, tj. funkcja postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dla dowolnych wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$, rozkłada się na kombinację liniową wielomianów i tzw. ułamków prostych — ułamków postaci $\frac{1}{(x-c)^j}$, $\frac{1}{(x^2+bx+c)^j}$ lub $\frac{x}{(x^2+bx+c)^j}$, gdzie $b, c \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, oraz wielomian $x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych w liczbach rzeczywistych. Wykorzystamy w tym celu podstawowe pojęcia z algebry liniowej.

2 Praktycznie cały dowód

Niech $Q(x)$ będzie dowolnym wielomianem stopnia $n+1$ o *różnych* miejscach zerowych $r_0, r_2, \dots, r_n$. Rozpatrzmy zbiór $\mathcal{L}$ wszystkich funkcji wymiernych postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie stopień $P(x)$ jest *mniejszy* niż stopień $Q(x)$ (czyli wynosi co najwyżej n). Łatwo zauważyć, że $\mathcal{L}$ wraz z działaniami po współrzędnych tworzy przestrzeń liniową. Pokażemy, że wektory postaci:

$$\frac{1}{x-r_0}, \frac{1}{x-r_1}, \dots, \frac{1}{x-r_n}$$

stanowią $n+1$ elementową bazę przestrzeni $\mathcal{L}$. Ponieważ $n+1$ wektorów:

$$\frac{1}{Q(x)}, \frac{x}{Q(x)}, \frac{x^2}{Q(x)}, \dots, \frac{x^n}{Q(x)}$$

rozpina $\mathcal{L}$, więc wystarczy dowieść, że $\left\{\frac{1}{x-r_i}\right\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ są liniowo niezależne, czyli, że żaden z wektorów nie jest kombinacją liniową pozostałych. Ale tak jest, bo ustalony $\frac{1}{x-r_k}$ ma osobliwość w r_k, a każdy z pozostałych wektorów z definicji ma w r_k granicę (wartość) skończoną, więc $\frac{1}{x-r_k}$ nie może być postaci $\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant n, i\neq k} \frac{\alpha_i}{x-r_i}$ dla żadnych skończonych α_i.

Pokazaliśmy, że $\frac{1}{x-r_0}, \frac{1}{x-r_1}, \dots, \frac{1}{x-r_n}$ jest bazą $\mathcal{L}$, czyli że każda funkcja wymierna $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dla $P(x)$ stopnia nie większego niż n rozpisuje się jednoznacznie jako suma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_0}{x-r_0} + \frac{\alpha_1}{x-r_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x-r_n}$$

3 Jak wyliczać współczynniki?

Współczynniki α_k można wyliczyć w następujący sposób — skoro równość:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_0}{x - r_0} + \frac{\alpha_1}{x - r_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x - r_n}$$

zachodzi w każdym punkcie w którym lewa strona jest określona, to równość ta będzie także zachodziła po pomnożeniu obydwu stron przez $x - r_k$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}(x - r_k) = \frac{\alpha_0}{x - r_0}(x - r_k) + \frac{\alpha_1}{x - r_1}(x - r_k) + \cdots + \frac{\alpha_n}{x - r_n}(x - r_k)$$

i przejściu do granicy $x \to r_k$; z lewej strony mamy:

$$\lim_{x \to r_k} \frac{P(x)\cancel{(x - r_k)}}{a(x - r_0)(x - r_1)\cdots\cancel{(x - r_k)}\cdots(x - r_n)} = \frac{P(r_k)}{a\prod_{0 \leqslant i \leqslant n, i \neq k}(r_k - r_i)}$$

natomiast z prawej:

$$\lim_{x \to r_k} \left(\frac{\alpha_0(x - r_k)}{x - r_0} + \frac{\alpha_1(x - r_k)}{x - r_1} + \cdots + \frac{\alpha_k\cancel{(x - r_k)}}{\cancel{x - r_k}} + \cdots + \frac{\alpha_n(x - r_k)}{x - r_n} \right) = \alpha_k$$

stąd:

$$\alpha_k = \frac{P(r_k)}{a\prod_{0 \leqslant i \leqslant n, i \neq k}(r_k - r_i)} = \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)}$$

gdzie ostatnia równość wynika bezpośrednio z różniczkowania przez części.

4 Co jeżeli w $Q(x)$ występują nierozkładalne dwumiany?

Załóżmy, że podczas rozkładu $Q(x)$ natknęliśmy się na nierozkładalny dwumian $x^2 + bx + c$, którego wyróżnik $b^2 - 4c$ jest mniejszy od zera. Wtedy taki dwumian nie ma miejsc zerowych, więc nie możemy go zapisać w postaci:

$$x^2 + bx + c = (x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2})(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2})$$

ani tym bardziej nie możemy wyliczyć odpowiadających mu współczynników:

$$\alpha_k = \frac{P(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2})}{a\prod_{0 \leqslant i \leqslant n, i \neq k}(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} - r_i)}$$

oraz:

$$\alpha_l = \frac{P(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2})}{a\prod_{0 \leqslant i \leqslant n, i \neq l}(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} - r_i)}$$

Jeżeli jednak zignorujmy te irytujące fakty i postępując zgodnie z matematycznym porzekadłem:

If the fool would persist in his folly he would become wise.

sprowadzimy nieistniejącą funkcję:

$$\frac{\alpha_k}{x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}} + \frac{\alpha_l}{x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}}$$

na jedną kreskę ułamkową:

$$\frac{\alpha_k(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}) + \alpha_l(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2})}{(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2})(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2})} = \frac{(x + \frac{b}{2})(\alpha_k + \alpha_l) + \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}(\alpha_l - \alpha_k)}{x^2 + bx + c}$$

oraz pieczołowicie wyliczymy licznik, to okaże się, że wszystkie nieistniejące „dziabągi" postaci $\sqrt{b^2 - 4c}$ albo popodnosiły się do kwadratu, albo poskracały. Dzieje się tak ponieważ współczynniki α_k oraz α_l były wyliczane jako wartości funkcji wymiernych dla argumentów różniących się wyłącznie znakami dziabągów — a jak przekonamy się w przyszłym semestrze funkcje wymierne (o współczynnikach rzeczywistych) zawsze zachowują symetrię względem liczb rzeczywistych. Te rzeczy staną się o wiele jaśniejsze kiedy wprowadzimy liczby zespolone. Z drugiej strony wtedy w ogóle przestanie nam zależeć na rozkładzie na ułamki postaci $\frac{x+a}{x^2+bx+c}$, co w pewnym sensie może wyjaśniać dlaczego ta część została potraktowana trochę po macoszemu.

5 Co jeżeli $Q(x)$ ma wielokrotne miejsca zerowe?

Jeżeli wielomian $Q(x)$ ma wielokrotne miejsca zerowe, tzn.: w rozkładzie $Q(x)$ występują wielomiany $(x-x_k)^j$, to jako składniki bazy zamiast jednego wektora $x-r_k$ przyjmujemy j wektorów $\frac{1}{(x-r_k)^1}, \frac{1}{(x-r_k)^2}, \ldots, \frac{1}{(x-r_k)^j}$. Dowód liniowej niezależności takich wektorów jest praktycznie identyczny — wystarczy tylko powołać się na stopień danej osobliwości. Również podobnie rozumując można wyliczyć współczynnik α_k^s stojący przy miejscu zerowym $x - x_k$ o liczności s, tj. przy $\frac{1}{(x-r_k)^s}$ — jeżeli pomnożymy obydwie strony równości przez $(x - r_k)^j$, gdzie j jest licznością miejsca zerowego r_k wielomianu $Q(x)$, to jedynie przy α_k^s otrzymamy miejsce zerowe o liczności dokładnie $j - s$; różniczkując obydwie strony $j - s$ razy i przechodząc z granicą $x \to r_k$, po lewej stronie mamy:

$$\lim_{x \to r_k} \left[\frac{P(x)(x - r_k)^j}{Q(x)} \right]^{(j-s)}$$

natomiast po prawej:

$$(j - s)!\alpha_k^s$$

stąd:

$$\alpha_k^s = \frac{\lim_{x \to r_k} \left[\frac{P(x)(x-r_k)^j}{Q(x)} \right]^{(j-s)}}{(j - s)!}$$

6 Co jeżeli $P(x)$ nie ma stopnia mniejszego niż $Q(x)$?

Jeżeli wielomian $P(x)$ ma stopnień wyższy lub równy wielomianowi $Q(x)$, wtedy stosując algorytm Euklidesa dzielimy $P(x)$ przez $Q(x)$ otrzymując wielomian $S(x)$ i wielomian reszty $R(x)$, który ma już stopień mniejszy niż $Q(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$