Piąte zadanie

Michal R. Przybylek

7 listopada 2012

Wstęp

W tej krótkiej notce przeliczymy piąte zadanie z pierwszego kolokwium, które odbyło się 31-ego października roku 2012. W zadaniu tym dany jest następujący ciąg:

$$a_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n-1}$$

dla:

$$n = 4, 5, 6, \ldots$$

1

Obliczamy a_4, a_5, a_6. Ale *najpierw* zastanawiamy się ile składników znajduje się w sumie a_n — pierwszy składnik to $2n$, a ostatni to $3n-1$ stąd składników mamy $3n - 1 - 2n = n - 1$ *plus* jeden, bo wliczamy oba końce przedziału. Czyli składników mamy n. Teraz wypisujemy a_4, a_5, a_6:

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \\
a_5 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} \\
a_6 &= \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17}
\end{aligned}$$

nie widząc zbyt głębokiego sensu dalszego przekształcania tych wyrażeń.

2

Kolejne polecenie jest pytaniem o monotoniczność ciągu a_n, oczywiście dla tych n, dla których ciąg został zdefiniowany. Wypisujemy elementy a_{n+1}:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)+1} + \frac{1}{2(n+1)+2} + \ldots + \frac{1}{3(n+1)-1} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \ldots + \frac{1}{3n+2} \end{aligned}$$

Odejmując a_{n+1} od a_n dostajemy:

$$\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}\right)$$

Chcemy zbadać nierówność:

$$\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}\right) > 0$$

czy też równoważnie:

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}$$

Składnik $\frac{1}{2n+1}$ po lewej stronie sprawia, że mamy tam trochę mniej niż $\frac{1}{n}$, więc na pewno nie da się w zuniformizowany sposób przeszacować z osobna każdego składnika po prawej stronie. Sensowne za to wydaje się przeszacowanie środkowego składnika po prawej stronie (ważoną) sumą pozostałych — wystarczy przypomnieć sobie, że:

$$\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}$$

co jest większe od:

$$\frac{1}{x}$$

o ile $x > 1$. Czyli wystarczy pokazać nierówność:

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} > \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1\frac{1}{3}}$$

która z oczywistych powodów jest spełniona. Zatem a_n jest monotonicznie malejący.

Możemy też niczego sobie nie przypominać i posłużyć się standardową metodą — czyli sprowadzić cały ułamek „na jedną kreskę" ułamkową:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} \\
= \; & \frac{1}{6n} + \frac{(3n+1)(3n+2) - (2n+1)(3n+1+3n+2)}{(2n+1)(3n+1)(3n+2)} \\
= \; & \frac{1}{6n} + \frac{9n^2+9n+2-(12n^2+12n+3)}{(2n+1)(9n^2+9n+2)} \\
= \; & \frac{1}{6n} - \frac{3n^2+3n+1}{18n^3+27n^2+13n+2} \\
= \; & \frac{9n^2+7n+2}{6n(18n^3+27n^2+13n+2)}
\end{aligned}$$

po czym rozwiązać nierówność:

$$\frac{9n^2+7n+2}{6n(18n^3+27n^2+13n+2)} > 0$$

Ale tego, niestety, nie udało się poprawnie zrobić żadnemu studentowi podczas kolokwium.

3

W następnym poleceniu mamy pokazać nierówności dla $n \geq 4$:

$$\frac{1}{2} > a_n > \frac{1}{3}$$

Fakt

$$\frac{1}{2} > a_4 > a_5 > a_6 > \dots$$

implikuje natychmiast, że

$$\frac{1}{2} > \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n$$

Drugą nierówność też możemy dostać od razu, jeżeli powołamy się na ten sam fakt i zauważymy, że[1]

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \ln(\frac{3}{2}) > \frac{1}{3}$$

Ale o tym za chwilę. Inny sposób to zauważyć, że każdy składnik sumy:

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n-1}$$

szacuje się przez ostatni wyraz $\frac{1}{3n-1}$, czyli:

$$a_n > \frac{n}{3n-1} > \frac{1}{3-\frac{1}{n}} > \frac{1}{3}$$

Jeszcze inny sposób na pokazanie tego samego, to rozwiązanie kolejnego polecenia i powołanie się na monotoniczność.

4

W tym poleceniu do pokazania są nierówności granicy:

$$\frac{1}{2} > \lim_{n\to\infty} a_n > \frac{1}{3}$$

Jak powiedziano wyżej, pokazanie tych nierówności plus ścisła monotoniczność a_n implikuje natychmiast prawą nierówność z poprzedniego polecenia (i lewą od pewnego miejsca). Pamiętajmy, że nie możemy wnioskować w drugą stronę — nierówność dla $n \geq 4$:

$$a_n > \frac{1}{3}$$

implikuje tylko *nieostrą* nierówność:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \frac{1}{3}$$

co zapewne nie raz zostało podkreślone na ćwiczeniach i wykładzie i opatrzone stosownym kontrprzykładem. Choć, oczywiście

$$\frac{1}{2} > \lim_{n\to\infty} a_n$$

[1]Gdzie ostatnia nierówność wynika z nierówności Bernoulliego.

dostajemy natychmiast ze ścisłej monotoniczności a_n.

Klasyczna metoda przy dowodzeniu tego typu nierówności, to próba poszacowania składników elementów ciągu. Niestety szacowanie każdego składnika a_n przez $\frac{1}{3n-1}$ jest zbyt grube, aby otrzymać ostre szacowanie granicy a_n. Na szczęście nie potrzeba nam wcale o wiele lepszego szacowania — dowolna stała $\epsilon > 0$ separująca nas od $\frac{1}{3}$ załatwia już sprawę. Skoro szacowanie przez ostatni element było zbyt grube, w myśl powyższego, można podzielić a_n na dwie „połówki”:

$$a_n = (\frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n+k}) + (\frac{1}{2n+k+1} + \ldots + \frac{1}{3n-1})$$

i każdą przeszacować przez jej najmniejszy element. Wybór k w okolicach połowy n powinien załatwić sprawę[2]. Aby nie trudzić się z rozdzielaniem ciągu na dwie „prawie równe połówki” w przypadku gdy n nie jest parzyste, możemy rozpatrzyć podciąg a_{2n} ciągu a_n i powołać się na twierdzenie mówiące, że każdy podciąg ciągu zbieżnego zbiega do tej samej granicy; równoważnie, możemy ponownie powołać się na monotoniczność ciągu która z definicji daje szacowanie $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$. Nierówności:

$$\begin{aligned} a_{2n} \quad &= \quad \left(\frac{1}{4n} + \ldots + \frac{1}{4n+n}\right) + \left(\frac{1}{4n+n+1} + \ldots + \frac{1}{6n-1}\right) \\ &> \quad \frac{n}{4n+n} + \frac{n}{6n-1} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \\ &> \quad \frac{1}{3} \end{aligned}$$

na mocy twierdzenia o szacowaniu dają nierówność:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} > \frac{1}{3}$$

więc ostatecznie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n > \frac{1}{3}$$

Jest jeszcze prostszy sposób na rozwiązanie tej części zadania — samą granicę a_n można nietrudno policzyć, jeżeli wie się, że ciąg:

$$H(n) - \ln(n)$$

---

[2]Tak naprawdę, dla k liniowo zależnego od n taki wybór jest bliski najlepszemu. Optimum dostajemy dla $k = n(\sqrt{6} - 2) \approx 0.45n$.

jest zbieżny do pewnej nieważne-jakiej-tam stałej γ. Gdzie:

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

jest n-tą liczbą harmoniczną. To jednak łatwo jest pokazać, korzystając z wprowadzonej na wykładzie nierówności Bernoulliego i powołując się na twierdzenie o trzech ciągach. Wtedy zapisujemy:

$$\begin{aligned} a_n &= H(3n-1) - H(2n-1) \\ &= (H(3n-1) - \ln(3n-1)) - (H(2n-1) - \ln(2n-1)) + \ln(\frac{3n-1}{2n-1}) \end{aligned}$$

i powołując się na twierdzenie o sumie granic:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left[(H(3n-1) - \ln(3n-1)) - (H(2n-1) - \ln(2n-1)) + \ln(\frac{3n-1}{2n-1}) \right] \\ &= \gamma - \gamma + \lim_{n\to\infty} \ln(\frac{3-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}) \\ &= \ln(\frac{3}{2}) \end{aligned}$$