Zadania

Michał R. Przybyłek

1. (0p) Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią kartezjańsko domkniętą i kokartezjańsko domkniętą (tj. $\mathbb{C}^{op}$ jest kartezjańsko domknięta). Pokazać, że $\mathbb{C}$ jest zdegenerowana.

2. (6p) Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią kartezjańsko domkniętą z obiektem początkowym. Pokazać, że jeśli dla każdego $A \in \mathbb{C}_0$ istnieje izomorfizm $0^{0^A} \approx A$, to $\mathbb{C}$ jest zdegenerowana.

3. (0p) Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią kartezjańsko domkniętą z obiektem początkowym. Pokazać, że jeśli istnieje naturalny w A morfizm $0^{0^A} \to A$, to $\mathbb{C}$ jest zdegenerowana.

4. (10p) Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią skończenie zupełną z binarnymi koproduktami. Pokazać, że $\mathbb{C}$ jest ekstensywna witw. kanoniczne funktory koproduktu $\mathbb{C}/A \times \mathbb{C}/B \to \mathbb{C}/A \sqcup B$ są równoważnościami kategorii.

5. (15p) Opisać w jawny sposób jak wygląda składanie dystrybutorów.

6. (0p) Opisać w jawny sposób jak wyglądają funktory lewe i prawe sprzężone do przeindeksowań w rozwłóknieniu wewnętrznej logiki zbiorów $sub(\mathbf{Set})\colon Sub(\mathbf{Set}) \to \mathbf{Set}$.

7. (6p) Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie rozwłóknieniem. Opisać w jawny sposób jak wygląda rozwłóknienie $cod(\mathbb{B}) \circ p^*\colon \mathbb{P} \to \mathbb{B}$, gdzie p^* jest pullbackiem p wzdłuż $dom(\mathbb{B})\colon \mathbb{B}^{\to} \to \mathbb{B}$. Takie rozwłóknienie jest nazywane rozwłóknieniem rodzin p. Dlaczego?

8. (6p) Opisać w jawny sposób jak wyglądają kategorie wewnętrzne względem $\mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$.

9. (10p) Opisać w jawny sposób jak wygląda klasyfikator podobiektów w $\mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$.

10. (6p) Opisać w jawny sposób jak wyglądają obiekty wykładnicze w $\mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$.

11. (30p) Dla kategorii $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ nienaturalny wykładnik $\mathbb{B} \uparrow \mathbb{A}$ definiujemy jako kategorię funktorów $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ i ich transformacji (transformacją $\tau\colon F \to G$ nazywamy rodzinę morfizmów $\tau_{A \in \mathbb{A}_0}\colon F(A) \to G(A)$). Pokazać, że przyporządkowanie $\mathbb{B} \to \mathbb{B} \uparrow \mathbb{A}$ rozciąga się do funktora $\mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$, który posiada lewy sprzężony $\mathbb{A} \odot (-)$.

12. (6p) Niech **Rel** będzie kategorią zbiorów i relacji pomiędzy zbiorami. Zbadać w tej kategorii istnienie granic, kogranic i obiektów wykładniczych.

13. (15p+15p) Opisać w jawny sposób jak wyglądają funktory lewe i prawe sprzężone do przeindeksowań w rozwłóknieniu wewnętrznej logiki kategorii $\mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$, tj.: $sub(\mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}})\colon Sub(\mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}) \to \mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$. Pokazać, że każde włókno jest bialgebrą Heytinga (jest algebrą Heytinga i posiada koimplikacje — tj. lewe sprzężone do sumowania przez koprodukt).

14. (6p) Opisać w jawny sposób jak wyglądają funktory lewe i prawe sprzężone do przeindeksowań w rozwłóknieniu $ufam(\omega\mathbf{Set})\colon UFam(\omega\mathbf{Set}) \to \omega\mathbf{Set}$.

15. (6p+6p) Opisać w jawny sposób jak wyglądają kategorie wzbogacane kategorią zbiorów i relacji **Rel** ze strukturą monoidalną zadawaną przez produkt i teoriomnogościowy iloczyn kartezjański odpowiednio.

16. (6p) Niech $\mathbf{SplitFib}_{\mathbb{B}}$ będzie kategorią rozwłóknień, które są „split" (tj. koherencyjne izomorfizmy są identycznościami) i kartezjańskich funktorów nad ustaloną kategorią bazową $\mathbb{B}$. Pokazać, że ta kategoria ma obiekty wykładnicze.

17. (50p) (Wskazówka — to zadanie nie jest trudne, trzeba tylko się oswoić z notacją bisprzężeń[1]) Niech $\mathbf{Fib}_{\mathbb{B}}$ będzie 2-kategorią rozwłóknień, kartezjańskich funktorów i rozwłóknieniowych naturalnych transformacji nad ustaloną kategorią bazową $\mathbb{B}$. Pokazać, że ta 2-kategoria ma słabe obiekty 2-wykładnicze (tj. 2-funktory mnożenia kartezjańskiego mają prawe bisprzężone).

[1] Polecam przejrzeć notkę dostępną on-line: „2-categories" by John Power.