Kolokwium z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 15 XII 2016 (ok. godz. 14.15)

- Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach (własne imię, nazwisko, nr indeksu, nr grupy ćwiczeniowej; oraz niżej — „Zadanie nr ...").
- Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być poparte dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).***
- Każde z zadań warte jest 17,5 pkt ($4 \cdot 17,5 = 70$)
- Czas na rozwiązanie zadań: 3 godz.

Uwaga: dla uniknięcia pytań — przypomnienie: tu $0 \notin \mathbb{N}$.

Zadanie 1.

Znajdź granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ określonego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{dla } \ n \geqslant 1$$

lub wykaż, że ciąg ten nie ma granicy.

Zadanie 2.

Niech $c_n := \sqrt[n]{n!}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

a) Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $c_n \leqslant n$.

b) Wykaż, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_n} = 1$.

Uwaga: nie zapomnij, że $\sqrt[n]{\cdot}$ *pojawia się tu dwukrotnie — po raz pierwszy w definicji* c_n*...*

c) Zbadaj zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$.

Zadanie 3.

Szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny oraz $a_n \neq -1$ dla wszystkich $n \geqslant 0$. Wykaż zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$. Czy musi on (ten drugi szereg) być bezwzględnie zbieżny?

Zadanie 4.

Zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+7}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{n}{2016} - \left(1 - \frac{1}{2016}\right)^n}$.