Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 28 I 2017 — Część I

*Czas na rozwiązanie zadań cz. I: **2 godz.** Do zdobycia: 60 pkt.*
***Nie wolno** korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 1.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 3–4 pkt] Podaj definicję ***ograniczenia górnego*** i ***kresu górnego*** zbioru $A \subset \mathbb{R}$.

A. b) [1 pkt] Wskaż zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru pustego.

A. c) [2 pkt] Wyjaśnij krótko związek i różnicę pomiędzy pojęciami ***elementu największego*** i ***kresu górnego*** zbioru; różnicę zilustruj przykładem (ale nie obrazkiem...).

VERTE

B. [**8 pkt**] Sformułuj Twierdzenie ***„o granicy ciągu monotonicznego”***. Udowodnij to twierdzenie dla szczególnego przypadku, gdy ciąg jest rosnący i ograniczony z góry.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 2.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *— **musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 4–5 pkt] Dokończ definicję: *Ciąg* $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ *jest **ciągiem Cauchy'ego** wtedy i tylko wtedy gdy*

A. b) [4 pkt] Przyjmujemy następującą definicję: Ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ***dość miły*** wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{n\geqslant 1} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant |x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Podaj przykład takich dwóch dość miłych ciągów, że pierwszy jest ciągiem Cauchy'ego, a drugi nie.

VERTE

B. [6 pkt] Dla każdego z ciągów o n-tym wyrazie zadanym dla $n \geqslant 1$ poniższymi wzorami, rozstrzygnij dwie kwestie: **1)** – czy jest on ciągiem Cauchy'ego oraz **2)** – czy posiada on podciąg zbieżny:

a) $n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$,

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\pi}}$,

c) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 3.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 4–5 pkt] Sformułuj kryterium ***Dirichleta*** zbieżności szeregów.

A. b) [4 pkt] Podaj po jednym przykładzie ciągu $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, spełniającego warunek:

(i) ciąg $\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony i ściśle rosnący;

(ii) ciąg $\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony i nie jest monotoniczny.

VERTE

B. [6 pkt] Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2^n} \right)$;

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 4.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [5 pkt] Dla funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sformułuj:

(i) definicję ciągłości f w punkcie $a \in \mathbb{R}$ (tzw. ***wersję Heinego***):

(ii) warunek równoważny powyższej ciągłości f w punkcie $a \in \mathbb{R}$ w tzw. ***wersji Cauchy'ego***:

(iii) definicję jednostajnej ciągłości f.

A. b) [6 pkt] W każdej ramce podaj wartość odpowiedniej granicy funkcji, o ile istnieje; natomiast gdy nie istnieje, wpisz "BRAK":

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(13x^3)}{e^{(x^3)}-1}$ $\boxed{}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x^5}\right)$ $\boxed{}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{(-x^2)}-e^{(-1)}}{x^2-1}$ $\boxed{}$

VERTE

B. [4 pkt] Podaj przykład ciągłej funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna we wszystkich punktach $a \neq 17$ i dla której $f'(17) = +\infty$.

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 28 I 2017 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.
Wykaż zbieżność i znajdź granice ciągów o wyrazach zadanych dla $n \geqslant 1$ następująco:

a) $a_n = \sqrt[n]{11^n - 10^n + n^{110}}$, **b)** $b_n = \left(a_n - \frac{71}{7}\right)^n$, gdzie a_n jest określony w a).

Zadanie 2.
Rozważamy funkcję ciągłą $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ liczb z $[0; 1]$ o tej własności, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi

$$|f(x_n)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Wykaż, że równanie $f(x) = 0$ posiada rozwiązanie x w przedziale $[0; 1]$.

Zadanie 3.
Zakładamy, że ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ ma wszystkie wyrazy większe lub równe zero. Niech dla $n \geqslant 1$:

$$a_n := \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \qquad g_n := \sqrt{x_n x_{n+1}}.$$

a) Wykaż, że jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny, to oba szeregi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ są zbieżne.

b) Czy ze zbieżności $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$?

c) Czy ze zbieżności $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$?

Zadanie 4.
Rozważamy funkcję ciągłą $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą $f(x + 2016) = f(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

a) Udowodnij, że f jest ograniczona.

b) Udowodnij, że f posiada punkt stały (tzn. $f(c) = c$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$).