Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 18 II 2017 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 2–3 pkt] Sformułuj **„aksjomat zupełności”** („ciągłości”) zbioru liczb rzeczywistych.

A. b) [tylko 0 lub 2 pkt] Dla każdego z poniższych zbiorów wskaż zbiór jego wszystkich ograniczeń **dolnych**:

(i) $\mathbb{R}$

(ii) $(3; 6)$

(iii) $[3; 6)$

A. c) [2 pkt] Wskaż przykład ciągu ograniczonego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ którego zbiór wszystkich wyrazów nie ma elementu najmniejszego, ani największego.

VERTE

B. [8 pkt] Sformułuj **twierdzenie *„o zupełności* $\mathbb{R}$*”*** (nie chodzi o aksjomat…, chodzi o twierdzenie związane z pojęciem ciągu Cauchy'ego …). Udowodnij to twierdzenie.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 2.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 3–4 pkt] Sformułuj twierdzenie ***„o zachowaniu nierówności przy przejściu granicznym"*** (dla ciągów).

A. b) [2=1+1 pkt] Przyjmujemy następującą definicję: Ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ***dość zły*** wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{N\geqslant 1}\exists_{n\geqslant N} \quad |x_{n+1}-x_n| \geqslant n.$$

Podaj przykład dość złego ciągu. Rozstrzygnij, czy ciąg dość zły może mieć podciąg zbieżny.

VERTE

B. [9 pkt] Dla każdego z ciągów o n-tym wyrazie zadanym dla $n \geqslant 1$ poniższymi wzorami, rozstrzygnij dwie kwestie: **1)** – czy jest zbieżny oraz **2)** – czy jest ograniczony:

a) $\sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$,

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{\pi^k}$,

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{n}$.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 3.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 4–5 pkt] Sformułuj kryterium ***porównawcze*** zbieżności szeregów.

A. b) [4 pkt] Podaj po jednym przykładzie par ciągów $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, takich, że:

(i) $a_n \longrightarrow 0$, ciąg $\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony, ale $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ jest rozbieżny:

(ii) $a_n \longrightarrow 0$, ciąg $\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony oraz $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ ma sumę równą 1:

VERTE

B. [6 pkt] Szereg $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ jest iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 1$ i $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Zbadaj zbieżność $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ oraz zbieżność $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 4.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 4–5 pkt] Sformułuj twierdzenie ***„Bolzano o własności Darboux"***

A. b) [6 pkt] W każdej ramce podaj wartość odpowiedniej granicy funkcji, o ile istnieje; natomiast gdy nie istnieje, wpisz "BRAK":

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{tg}(x^2)}{\cos x}$ $\boxed{}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x^5}\right)$ $\boxed{}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{(-x^3)}-1}{x^2}$ $\boxed{}$

VERTE

B. [4 pkt] Podaj przykład ograniczonej różniczkowalnej funkcji $f : (0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie ma granicy w punkcie 0.

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 18 II 2017 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.

a) Wykaż, że dla **każdego** $x \in \mathbb{R}$ oraz **parzystego** $n \geqslant 2$ zachodzi

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Czy parzystość n jest tu istotna?

b) Rozważamy ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ zadany wzorem rekurencyjnym

$$a_1 = c, \qquad a_{n+1} = \frac{(a_n+1)^4 - 1}{4} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1,$$

gdzie c jest pewną wybraną liczbą. Wykaż, że ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest monotoniczny przy każdym wyborze $c \in \mathbb{R}$.

c) Znajdź granicę powyższego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ w zależności od wartości c.

Zadanie 2.
Dla ciągów o wyrazach zadanych poniższymi wzorami (dla $n \geqslant 1$) zbadaj istnienie granic i znajdź je, o ile istnieją:

a) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{1000^n}}$, **b)** $b_n = \left(a_n + 1 - \frac{1}{n}\right)^n$, gdzie a_n jest określony w a).

Zadanie 3.
Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbadaj zbieżność oraz bezwzględną zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+14}\, x^n.$

Zadanie 4.
Rozważamy funkcję ciągłą $f : D \longrightarrow D$, gdzie $D = [0; +\infty)$, spełniającą

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{12}{13}.$$

Udowodnij, że f posiada punkt stały (tzn. $f(c) = c$ dla pewnego $c \in D$).