Kolokwium z Analizy Matematycznej
dla Informatyków, 11 V 2017 (ok. godz. 14.15)

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych kartkach:*

  w lewym górnym rogu *własne imię, nazwisko, nr indeksu oraz niżej — „Zadanie nr ...”*

  w prawym górnym rogu *nr grupy ćwiczeniowej.*
- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być opatrzone dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwy).***
- *Każde z zadań warte jest* ***17,5 pkt****.*
- *Czas na rozwiązanie zadań:* ***3 godz****.*

Zadanie 1.
Wykaż następujące kryterium na ekstrema: Niech $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ będzie n–krotnie różniczkowalna w $c \in (a;b)$, gdzie $n \geqslant 2$. Jeżeli $f^{(k)}(c) = 0$ dla każdego $k = 1, \ldots, n-1$ oraz $\alpha := f^{(n)}(c) \neq 0$, to

(i) jeżeli n jest parzyste i $\alpha > 0$ (< 0), to f posiada ścisłe minimum (maksimum) lokalne w c — *wybierz wersję dla maksimum lub dla minimum*;

(ii) jeżeli n jest nieparzyste, to f nie posiada ekstremum lokalnego w c.

Zadanie 2.
Rozważamy funkcję $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$G(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n! + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(A) Wyjaśnij, dlaczego powyższa definicja G jest poprawną definicją pewnej funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$.

(B) Udowodnij, że G jest różniczkowalna i znajdź wartość $G'(0)$.

(C) Udowodnij, że G' jest ciągła.

Zadanie 3.
(A) Udowodnij, że funkcja g zadana na przedziale $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$ wzorem $g(x) := \dfrac{x}{\sin x}$ jest rosnąca.

(B) Wykaż nierówności: $\dfrac{\pi^2}{9} \leqslant \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\,dx \leqslant \frac{\pi^2}{6}$.

(C) Dla **wybranej jednej** z powyższych „nierówności” zbadaj, czy jest ona równością.

Uwaga: w podpunktach późniejszych można korzystać z wyników punktów wcześniejszych, nawet jeśli nie zostały udowodnione.

Zadanie 4.
Znajdź granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ zadanego dla $n \geqslant 1$ wzorem $a_n := \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

lub wykaż, że granica tego ciągu nie istnieje.