Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 20 VI 2017 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a), b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [**3 pkt**] Dla funkcji skalarnej f określonej na przedziale I sformułuj definicję ***wypukłości*** lub inny znany z wykładu warunek równoważny wypukłości.

A. b) [za <5 poprawnych: 0 pkt; za 5 poprawnych: 2 pkt; za 6: 3 pkt; za wszystkie: 5 pkt]
Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań, dotyczących funkcji skalarnych określonych na **całym** $\mathbb{R}$, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce.

☐ Jeśli funkcja jest wklęsła to jest różniczkowalna.

☐ Jeśli funkcja wypukła jest dwukrotnie różniczkowalna, to jej pochodna jest funkcją rosnącą.

☐ Pochodna funkcji różniczkowalnej ściśle rosnącej jest w każdym punkcie większa od zera.

☐ Pochodna różniczkowalnej funkcji lipschitzowskiej jest funkcją ograniczoną.

☐ Jeśli pochodna funkcji rózniczkowalnej jest ograniczona, to funkcja ta jest jednostajnie ciągła.

☐ Jeśli funkcja różniczkowalna ma ścisłe minimum lokalne, to jej pochodna przyjmuje zarówno wartość większą od zera, jak i wartość mniejszą od zera.

☐ Jeśli funkcja jest wypukła to ma minimum lokalne.

VERTE

B.) [7=2+5 pkt] Sformułuj twierdzenie ***Lagrange'a o wartości średniej*** i **przedstaw jego dowód** *(jak zwykle można tu korzystać z wcześniejszych wyników z wykładu już bez ich dowodzenia).*

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 2.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Uzupełnij poniższe sformułowanie twierdzenia ***o różniczkowalności granicy***.

Niech I będzie przedziałem oraz $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ niech będą funkcjami różniczkowalnymi dla wszystkich $n \geqslant 1$. Jeśli funkcja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taka, że dla każdego $x \in I$ zachodzi $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ oraz

to f jest różniczkowalna oraz dla każdego $x \in I$

$$f'(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

A. b) [3 pkt] Podaj sformułowanie twierdzenia ***o ciągłości granicy***.

VERTE

B. [8=2x4 pkt] Dla funkcji $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, zdefiniowanych podanymi niżej wzorami dla wszystkich $x \in D$, rozstrzygnij o ciągłości oraz o różniczkowalności f:

- $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(7n)!}$ dla $D := \mathbb{R}$

- $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + x}$ dla $D := [0; +\infty)$

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 3.

Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [4=2x2 pkt] Dla funkcji $f\colon [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$ i podziału $P = (-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1)$ podaj wartości sumy dolnej (tzn. $\check{S}(f,P)$) oraz górnej (tzn. $\hat{S}(f,P)$):

A. b) [2 pkt] Podaj wartość całki górnej i całki dolnej z powyższej funkcji f.

A. c) [tylko za oba poprawne: 2 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości poniższych zdań, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce.

☐ Jeśli funkcja $g\colon [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje funkcja pierwotna do niej.

☐ Jeśli istnieje funkcja pierwotna do funkcji $g\colon [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, to g jest ciągła.

VERTE

B. a) [4 pkt] Wartość $g(x)$ funkcji $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest dla każdego $x \in \mathbb{R}$ całką **Riemanna** po przedziale $[x^2; x^4 + 1]$ z funkcji zadanej wzorem $e^{(t^2)}$ (dla wszystkich t z tego przedziału). Wykaż różniczkowalność funkcji g.

B. b) [3 pkt] Zbadaj, czy to prawda, że dla pewnego $a \in (0; 1)$ zachodzi

$$e^{(a^2)} = \int_0^1 e^{(t^2)}\, dt.$$

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 4.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj przykład przestrzeni metrycznej (X, ρ) oraz pewnej takiej rodziny podzbiorów otwartych w tej przestrzeni, że przecięcie tej rodziny nie jest zbiorem otwartym ani domkniętym.

A. b) [2 pkt] Podaj przykład takiej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f^{-1}(\{0\})$ jest zbiorem zwartym nieskończonym. *Uwaga: proszę nie mylić nieskończonego z nieograniczonym...*

A. c) [2 pkt] Znajdź macierz Jakobiego w punkcie 0 funkcji $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zadanej wzorem

$$f(x) := (x_1 + 2x_2 + 7x_3,\ x_1x_2 + e^{x_3}), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

A. d) [2 pkt] Funkcja $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $(\operatorname{grad} G)(0,0,0) = (1,1,1)$ i $(\operatorname{grad} G)(1,1,1) = (6,3,2)$. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana jest wzorem

$$f(t) := G(t, t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podaj wartość $f'(1)$.

VERTE

B. [6=1+5 pkt] Sformułuj i wykaż twierdzenie **o ciągłości funkcji różniczkowalnej** dla funkcji d-zmiennych ($d \geqslant 1$).

B. DODATKOWE [za dodatkowe 5 pkt] Rozważamy zbiór $X := \{1, 2, 3\}$ oraz funkcję μ określoną na rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru X:

$$\mu(A) := \begin{cases} 3 & \text{dla } A \text{ będącego każdym ze zbiorów: } \{1\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ X \\ 0 & \text{dla wszystkich pozostałych zbiorów } A \end{cases}$$

Rozstrzygnij, czy tak zdefiniowane μ jest miarą.

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 20 VI 2017 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2,5 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.
Rozważamy "przybliżenie" $p := 1,1$ liczby $\sqrt[10]{e}$.

(i) Wykaż, że $p < \sqrt[10]{e} < p + 0,006$.

(ii) Czy oszacowanie powyższe można "poprawić" do $\sqrt[10]{e} \leqslant p + 0,005$?

Zadanie 2.

(i) Funkcja $g : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $g(x) := \frac{x}{1+x^3}$ dla $x \geqslant 0$. Znajdź pewną jej funkcję pierwotną.

(ii) Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^6}\,dx$, a jeśli jest zbieżna, to oblicz jej wartość

(uwaga: przy tym obliczaniu może przydać się punkt (i)).

Zadanie 3.
Rozważamy $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = y^2 + z^2 = 1\}$ oraz funkcję $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ daną dla $(x, y, z) \in M$ wzorem

$$f(x, y, z) = x + y + z.$$

Znajdź kres górny oraz dolny zbioru wartości f. Zbadaj, czy f posiada wartość największą oraz czy posiada wartość najmniejszą.

Zadanie 4.
Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ określonej dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wzorem

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)xy.$$

Wskazówka: Naszkicuj zbiór punktów, w których f ma wartość równą 0.