Ostatnia, niepisemna praca domowa

45. Pośród walców wpisanych w kulę o promieniu 1 znaleźć ten, dla którego suma pól podstaw i pola powierzchni bocznej jest największa.

46. Wykazać, że $\log(1/\cos(x)) \leqslant \frac{1}{2}\sin(x)\,\mathrm{tg}(x)$ dla $x \in [0, \pi/2)$.

47. Na ćwiczeniach i wykładzie pojawiła się funkcja zdefiniowana wzorami $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ dla $x \neq 0$. Jest ona różniczkowalna (wszędzie), ale jej pochodna nie jest ciągła w zerze.[1]

a) Zrozumieć, że funkcja zdefiniowana wzorami $g(0) = 0$, $g(x) = x^2(2 + \sin(1/x))$ dla $x \neq 0$ ma minimum globalne w zerze, ale nie jest monotoniczna na żadnym przedziale $(-\varepsilon, 0)$, ani na żadnym przedziale $(0, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

b) Zrozumieć, że funkcja zdefiniowana wzorami $h(0) = 0$, $h(x) = x + 2x^2 \sin(1/x)$ dla $x \neq 0$, jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$, jej pochodna w zerze jest dodatnia, ale funkcja nie jest monotoniczna w żadnym przedziale zawierającym zero.

[1] Istotnie, $f'(0) = 0$ (sprawdzamy z definicji), zaś dla $x \neq 0$ mamy $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ (liczymy ze wzorów na pochodną iloczynu i złożenia), co nie ma granicy przy $x \to 0$ (z powodu drugiego składnika).