Pisemna praca domowa na wtorek, 16.01.2024

Można, a nawet należy, powoływać się na fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Zadanie 42. jest warte 2 punkty (każdy podpunkt za 0,25 punkta). Termin oddania: wtorek, 16.01.2024, na początku ćwiczeń.

Na odwrocie znajdują się dwa zadania niepisemne, do przemyślenia i pogłówkowania dla chętnych.

40. Podać przykład takich ciągów

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots > 0,$$
$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots > 0,$$

że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są rozbieżne (do $+\infty$), ale jednocześnie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n \coloneqq \min\{a_n, b_n\}$, jest zbieżny (do skończonej sumy).

41 (c.d. zadania z ćwiczeń)**.** Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory i ich obrazy przy przekształceniu $z \mapsto e^z$:

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = \frac{\pi}{4}\}$,
d) $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \frac{\pi}{4}\}$,
e) $E = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{7\pi}{4} \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \frac{\pi}{4}\}$.

Przypomnienie. Jeśli $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, to $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

42. Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność następujących szeregów (odpowiedź może zależeć od parametrów α, x; nie trzeba obliczać sumy szeregu):

(a) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{n-\sqrt{n}},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos(n)},$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^3} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} x^n \quad (x \in \mathbb{R}),$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}} \quad (\alpha \in (0,1]),$$

(f) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n^2+1}{3n} \rfloor} \frac{\ln(n)}{n},$$

(g) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}},$$

(h) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \sin(n)}{n^{3/2}}.$$

43. Czy istnieje ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n\geqslant 1}$ taki, że

a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} a_n$ jest zbieżny?
b) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} a_n$ jest zbieżny?
c) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ są rozbieżne?
d) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ są zbieżne?

W każdym podpodpunkcie należy podać odpowiedni przykład lub udowodnić, że taki ciąg nie istnieje.

44. Szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ są zbieżne. Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ musi być zbieżny?

Dwa zadania niepisemne

Dwa zadania rozrywkowe, do przemyślenia i pogłówkowania dla chętnych.

A. Załóżmy, że $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ to bijekcja. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sigma(n)}$ może być zbieżny?

B. a) Rozpatrzmy szereg o wyrazach zespolonych $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $z_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są bezwzględnie zbieżne.

b) Jakie sumy można uzyskać przestawiając wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, jeśli $z_n = \frac{(-1)^n}{n} + i \cdot \frac{(-1)^n}{n}$? A jeśli $z_n = \frac{(-1)^n}{n} + i \cdot \frac{1}{2^n}$? A jeśli $z_n = \frac{e^{in\pi/2}}{n}$?