Pisemna praca domowa na piatek, 15.12.2023

Można, a nawet należy, powoływać się na fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Zadanie 38. jest warte 2 punkty (każdy podpunkt za 0,25 punkta). Termin oddania: piątek, 15.12.2023, na początku ćwiczeń.

36. a) Czy funkcja $f(x) = \sin(x + \sin(x))$, $x \in [0, \infty)$, jest jednostajnie ciągła?
b) Czy funkcja $g(x) = \sin\big(x \sin(x)\big)$, $x \in [0, \infty)$, jest jednostajnie ciągła?

Przypomnienie. Jeśli $h\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz istnieje skończona granica $\lim_{x\to\infty} h(x)$, to h jest jednostajnie ciągła na $[0, \infty)$. Odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe: z tego, że nie istnieje granica $\lim_{x\to\infty} h(x)$ absolutnie nie wynika, że funkcja h nie jest jednostajnie ciągła na $[0, \infty)$.

Wskazówki. Czy jest prawdą, że złożenie funkcji jednostajnie ciągłych jest jednostajnie ciągłe? (Dlaczego?) A może prościej sprawdzać warunek Lipschitza?

37. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \cdots - \frac{1}{n^2}\Big).$$

38. Zbadać zbieżność następujących szeregów (odpowiedź może zależeć od parametru α; nie trzeba obliczać sumy szeregu):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})}{\sqrt{n}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - 1)^{\alpha} \quad (\alpha > 0)$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2n+3}{3n+2}\Big)^{n/6}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2023^n}{\sqrt[5]{n!}}$,

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)^{\alpha} \quad (\alpha > 0)$.

39. W tym zadaniu *wszędzie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ jest nierosnącym (tj. malejącym, ale niekoniecznie ściśle) ciągiem liczb nieujemnych: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant 0$.
a) Sprawdzić, że prawdziwa jest następująca wersja kryterium zagęszczeniowego: szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_{3^n}$ jest zbieżny.
b) Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n! a_{n!}$ jest zbieżny.
c) Podać przykład ciągu $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant 0$, takiego że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n! a_{n!}$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Wskazówki. a+b) Obejrzeć dowód kryterium zagęszczeniowego (patrz wykład lub skrypt) i przepisać go wprowadzając odpowiednie zmiany. c) Zrozumieć, dlaczego psuje się dowód w drugą stronę.