Pisemna praca domowa na piątek, 08.12.2023

Można, a nawet należy, powoływać się na fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Termin oddania: piątek, 08.12.2023, na początku ćwiczeń.

31. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia $f(1000)+f(1023) < 2023 < f(23)+f(2000)$. Wykazać, że istnieją liczby rzeczywiste a, b takie, że $f(a) + f(b) = a + b = 2023$.

32. Niech $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ dla $x > -1$.

a) Korzystając tylko z definicji sprawdzić, że funkcja f jest jednostajnie ciągła na $[0, \infty)$. (Tzn.: dla danego $\varepsilon > 0$ wskazać konkretną $\delta > 0$ (zależną być może od ε), taką że ...).

b) W dowolny sposób rozstrzygnąć, czy funkcja f jest jednostajnie ciągła na $(-1, 0]$.

33. a) Czy funkcja $x \mapsto \cos(e^x)$ jest jednostajnie ciągła na $(-\infty, 0]$?

b) A na $[0, \infty)$?

34. Niech $D \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcje $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ są jednostajnie ciągłe i ograniczone na D. Wykazać, że funkcja $f \cdot g$ jest jednostajnie ciągła (na D).

35. Podać przykład takiej funkcji ciągłej $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, że

$$\forall x \in [0,1] \qquad \lim_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}} f(x+n) = 0,$$

ale nie jest prawdą, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Wskazówka, która może ułatwić poszukiwania. Taka funkcja *nie* może być jednostajnie ciągła (uzasadnienie tego faktu to osobne, pełnowartościowe zadanie).