

Pisemna praca domowa na piątek, 01.12.2023

Można, a nawet należy, powoływać się na fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.
Termin oddania: piątek, 01.12.2023, na początku ćwiczeń.

26. Funkcja $f: (-1, 1) \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ spełnia

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2.$$

Uzasadnić, że granica $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ istnieje i że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

27. Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych a, b takie, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - (ax + b) \right) = 0.$$

28. Znaleźć wszystkie wartości parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 1 & \text{dla } x \leq -1, \\ \frac{(1+x)^b - 1}{x} & \text{dla } -1 < x < 0, \\ c & \text{dla } x = 0, \\ \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1+x}} & \text{dla } 0 < x < 3, \\ d & \text{dla } x = 3, \\ d(x-3)\sqrt{x-3} & \text{dla } x > 3, \end{cases}$$

jest ciągła.

29. Funkcja $f: [1, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia $f(1) = 9f(9)$. Wykazać, że istnieje $x \in [1, 3]$, taki że $f(x) = 3f(3x)$.

30. Funkcja $f: [-1, 1] \rightarrow (0, 1]$ jest ciągła. Wykazać, że równanie $f(x) = x^4$ ma co najmniej dwa rozwiązania w przedziale $[-1, 1]$.