Pisemna praca domowa na piątek, 24.11.2023

Można, a nawet należy, powoływać się na fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Termin oddania: piątek, 24.11.2023, na początku ćwiczeń.

21. Podać przykład ciągów $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$, takich że spełnione są (naraz) wszystkie poniższe warunki:

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$,

(ii) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $b_n \neq 0$ oraz ciąg $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny do pewnej skończonej granicy $g \in \mathbb{R}$,

(iii) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $b_{n+1} \neq b_n$ oraz ciąg $(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n})_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny do pewnej skończonej granicy $h \in \mathbb{R}$,

(iv) $g \neq h$.

Wskazówka. Twierdzenie Stolza podpowiada na jakie ciągi $(b_n)_{n\geqslant 1}$ na pewno *nie* należy patrzeć.

22. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1+2^{2022}+\cdots n^{2022}}{n^{2022}} - \frac{n}{2023}\Big).$$

Przypomnienie (wskazówka?). Było: $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^{2022}+\cdots+n^{2022}}{n^{2023}} = \frac{1}{2023}$.

23. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ma wahanie ograniczone wtedy i tylko wtedy gdy ciąg zdefiniowany wzorem

$$b_n = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| \qquad (n \geqslant 2).$$

jest ograniczony.

a) Udowodnić, że ciąg o wahaniu ograniczonym jest zbieżny.

b) Podać przykład ciągu zbieżnego o wahaniu nieograniczonym.

Granice funkcji pojawiły sie na wykładzie 14.11.2023; na ćwiczeniach będziemy o nich mówić w piątek, 17.11.2023.

24. Obliczyć granice (lub wykazać, że nie istnieją):

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x^2\ln(1+\sin(x))},$$

(b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+3^x)}{\ln(x+2^x)},$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+x^2}-1}{x\ln(1+x)},$$

(d) $$\lim_{x\to\pi}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x^2-\pi^2}.$$

25. Niech P będzie wielomianem. Zbadać istnienie granic

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(\lfloor x\rfloor)}{P(x)}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\lfloor x\rfloor}}{e^{x}}.$$