Pisemna praca domowa na wtorek, 14.11.2023

Można, a nawet należy, powoływać się na fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Termin oddania: wtorek, 14.11.2023, na początku ćwiczeń.

15. Ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ jest rozbieżny do $+\infty$. Wykazać, że ciąg

$$A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, \quad n \geqslant 1,$$

jest także rozbieżny do $+\infty$. *Proszę o rozwiązanie bezpośrednie, korzystające z definicji granicy (nawet jeśli np. tw. Stolza pojawi się na zajęciach przed 14.11.)*

16. Ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ są takie, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, istnieje skończona granica $\lim_{n\to\infty} b_n$, a także $b_n n^5 + n^3 + 1 \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech

$$c_n = \frac{a_n n^2 + (1 - \frac{1}{n})^n + (-1)^n}{b_n n^5 + n^3 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Czy może się zdarzyć, że:
a) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$? b) $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$?
c) $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$? d) $\lim_{n\to\infty} c_n = -1$?
e) granica (nawet niewłaściwa, równa $+\infty$ lub $-\infty$) $\lim_{n\to\infty} c_n$ nie istnieje?
Odpowiedź uzasadnić (podając odpowiednie przykłady ciągów lub wykazując, że dla dowolnych ciągów spełniających założenia, dana sytuacja nie jest możliwa).

17. Niech $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$ dla $n \geqslant 1$. Zbadać zbieżność ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

18. Wyznaczyć kresy zbiorów:

$$A = \{ \sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \},$$
$$B = \left\{ \sqrt[n]{n} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\},$$
$$C = \left\{ \sqrt[m]{n} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

19. Dany jest ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Jego podciąg $(a_{n^2})_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny do pewnej granicy skończonej. Ciąg $(|a_{n+1} - a_n|)_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny do zera. Czy wynika stąd zbieżność ciągu $(a_n)_{n\geqslant 1}$?

20. Znaleźć granice ciągów (lub uzasadnić, że nie są one zbieżne):

$$a_n = \frac{e^{2/n^2} - e^{-1/n^2}}{1/n^2},$$
$$b_n = n^2 \ln\bigl(1 + \ln^2\bigl(1 + 1/n\bigr)\bigr),$$
$$c_n = \sqrt[n]{n! - 3^n} \quad (n \geqslant 7).$$