Pisemna praca domowa na wtorek, 31.10.2023

Można, a nawet należy, powoływać się na fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Termin oddania: wtorek, 31.10.2023, na początku ćwiczeń.

11. Znaleźć granice ciągów (lub uzasadnić, że nie są one zbieżne):

$$a_n = \frac{n^2 + \lfloor \frac{n}{6} \rfloor^2 + n\sqrt{n} + \frac{2^n}{3^n}}{2 + 4 + 6 + \cdots + (2n)},$$

$$b_n = \sqrt[4]{n^4 + n^3} - \sqrt[4]{n^4}, \qquad c_n = \sqrt[3]{n^3 + 7n^2} - n,$$

$$d_n = \sqrt[n]{\frac{2^n + 7^n}{3^n + 4^n + 5^n + 6^n}}, \qquad e_n = \sqrt[n]{1 + \binom{n+4}{4}},$$

$$f_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \ldots \cdot 3n}, \qquad g_n = \frac{\sin(\frac{\pi n}{2023}) + n - \lfloor n \rfloor}{8n + 7 \cdot (-1)^n},$$

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}.$$

(Całe zadanie jest warte 2 punkty, każdy podpunkt 1/4 punkta).

12. Definiujemy ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ kładąc:
(a) $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_{n+2} = a_{n+1}(1 - a_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$,
(b) $b_1 = b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_{n+1}(1 - b_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Zbadać zbieżność ciągów $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ (w szczególności: jeśli są zbieżne, to wyznaczyć ich granice).

13. Niech $a_1 \geqslant b_1 > 0$ oraz

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

dla $n \geqslant 1$. Wykazać, że ciągi $(a_n)_{n \geqslant 1}$ i $(b_n)_{n \geqslant 1}$ są zbieżne do wspólnej granicy (skończonej).

14. Dany jest ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n \geqslant 1}$, taki że ciągi $(a_{n+1}a_n)_{n \geqslant 1}$ oraz $(a_{n+1} + a_n)_{n \geqslant 1}$ są zbieżne do granic skończonych. Czy ciąg $(a_n)_{n \geqslant 1}$ musi być zbieżny?