Pisemna praca domowa na wtorek, 24.10.2023

Można, a nawet należy, powoływać się na fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Termin oddania: wtorek, 24.10.2023, na początku ćwiczeń.

6. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ zachodzi

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}\right)^2 \leqslant \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2.$$

7. Wykazać indukcyjnie, że dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{k=n}^{2n} 2^{-k} \binom{k}{n} = 1.$$

Wskazówki. Może się przydać wzór: $\binom{m}{l} = \binom{m-1}{l} + \binom{m-1}{l-1}$. Przykład dla osób nieoswojonych z notacją z sumami: dla $n = 3$ otrzymujemy po lewej stronie

$$\sum_{k=3}^{6} 2^{-k} \binom{k}{3} = 2^{-3}\binom{3}{3} + 2^{-4}\binom{4}{3} + 2^{-5}\binom{5}{3} + 2^{-6}\binom{6}{3}.$$

8 (kasuję to zadanie ze względu na błąd w pierwotnej wersji)**.** Niepusty i ograniczony z góry zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma tę własność, że dla każdego $a \in A$ istnieje $b \in A$, takie że $2a - 4 \leqslant b$. Poprawna teza: Wykazać, że $\sup A \leqslant 4$.

9. Niech A i B będą niepustymi, ograniczonymi podzbiorami $\mathbb{R}$. Przez $A+B$ oznaczamy zbiór złożony ze wszystkich liczb postaci $a + b$, gdzie $a \in A$, $b \in B$.[1] Wykazać, że

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

10. Wyznaczyć kres górny zbioru

$$\left\{\frac{m^2 + n^2}{2^m + 3^n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Uwaga. Być może warto wypisać wartości dla „niedużych” m, n w tabelce lub jakimś arkuszu kalkulacyjnym – to może pomóc przy stawianiu hipotez i próbie ich udowodnienia. Jeśli ktoś w swoim rozwiązaniu będzie potrzebował wykazać, że nierówność

$$\frac{m^2 + n^2}{2^m + 3^n} \leqslant \text{„jakaś konkretna liczba”}$$

zachodzi dla *skończeniu wielu* konkretnych wartości m, n (np. wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ takich że $m^2 + n^2 \leqslant 2023$), to może po prostu napisać, że tak jest (i nie musi załączać rachunków).

[1] Formalnie: $A + B \coloneqq \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$.