Pisemna praca domowa na wtorek, 17.10.2023

Można, a nawet należy, powoływać się na fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Termin oddania: wtorek, 17.10.2023, na początku ćwiczeń.

1. Niech a_0 będzie pewną liczbą nieujemną. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy rekurencyjnie $a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$. Znaleźć wzór jawny na a_n (wyrażony tylko w terminach a_0 i n).

Wskazówka. Wypisać a_1, a_2, a_3, a_4, zgadnąć wzór jawny i udowodnić go.

2. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej k i dowolnej liczby naturalnej n, liczba $k^2 + k + 1$ dzieli liczbę $k^{n+2} + (k+1)^{2n+1}$.

3. Wykazać, że

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Wskazówka. Dobrać takie $x > 0$, żeby dało udowodnić się indukcyjnie, że

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+x}}.$$

4. Dla każdego $\varepsilon > 0$ wskazać liczbę naturalną k taką, że

$$-\varepsilon \leqslant \frac{n-100}{n^3+n} \leqslant \varepsilon \qquad \text{dla wszystkich } n \geqslant k, n \in \mathbb{N}.$$

(Liczba k będzie zależała ε; nie trzeba podawać najmniejszej liczby k o tej własności, ale proszę podać konkretną wartość).

5. Wyznaczyć kresy zbiorów:

$$A = \left\{ \frac{|k-n|}{k^2+n} \ : \ k, n \in \mathbb{N}, k \neq n \right\},$$
$$B = \left\{ \frac{21k+n}{7k+2023n} \ : \ k, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Proszę o rozwiązanie bez powoływania się na fakty dotyczące granic ciągów.