1. Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 1.

Zadanie 1.1. Wykazać że jeśli szereg $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ jest zbieżny i $|\mathrm{Arg}(z_k)| \leqslant c < \frac{\pi}{2}$, to szereg $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ jest zbieżny.

Zadanie 1.2. Zbadać dla jakich z funkcje $\cos(z)$, $\sin(z)$, $\mathrm{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ przyjmują wartości rzeczywiste.

Zadanie 1.3 (niby niezbyt mądre, ale będzie miało dalszy ciąg)**.** Wykazać, że funkcja $z \to \mathrm{tg}\, z$ jest ograniczona na zbiorze $\mathrm{Im}\, z > \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

Zadanie 1.4.

- Znaleźć obraz pasa $|\,\mathrm{Re}\, z| < \frac{\pi}{2}$ przy przekształceniu $z \mapsto \cos z$.
- Wyznaczyć obraz prostej $K_x = \{z : \mathrm{Re}(z) = x\}$ przy przekształceniu $\cos z$. Rozważyć starannie szczególne przypadki: $x = \pi + 2k\pi$, $x = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- Wyznaczyć obraz górnej półpłaszczyzny przy przekształceniu $z \mapsto \cos z$.

Zadanie 1.5. Ustalmy $z \in \mathbb{C}$ takie że $\mathrm{Re}\, z < 0$. Niech

$$z_n = (1+z)(1+\frac{z}{2})(1+\frac{z}{3}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{z}{n})$$

Wykazać że $z_n \to 0$.

Zadanie 1.6. Niech $z_1, z_2, \dots z_n \in \mathbb{C}$. Wykazać że jeśli dla pewnego $w \in \mathbb{C}$ mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w - z_i} = 0$$

to $w \in \mathrm{conv}(z_1, \dots z_n)$. (uwypuklenie zbioru $\{z_1, \dots, z_n\}$ na płaszczyźnie).

Zadanie 1.7 (*)**.** Niech $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ będzie *rzeczywistą* funkcją analityczną, taką, że $f = \sum a_n x^n$ i szereg ma promień zbieżności co najmniej jeden. Przypuśćmy dodatkowo, że

- $f(0) = 0$;
- $f'(0) = 1$;
- $|f(x)| < 1$ dla wszystkich x z przedziału $(-1,1)$ (ten warunek jest, oczywiście kluczowy).

Udowodnij, że $f(x) = x$.

Uwaga! To zadanie ma bardzo pomysłowe i niezbyt trudne (jak się już raz widziało) rozwiązanie i bardzo głębokie konsekwencje. Uogólnia się na przypadek funkcji wielu zmiennych, rzeczywistych albo zespolonych.