

1. ZADANIA Z FUNKCJI ANALITYCZNYCH, SERIA STYCZNIOWA.

**Zadanie 1.1.** Oblicz sumę  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ . Wskazówka. Całkować funkcję  $\pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot \frac{1}{z^2+1}$  po brzegu odpowiedniego kwadratu.

**Zadanie 1.2.** Wykaż, że dla  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  zachodzi wzór:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}.$$

Wskazówka. Całkuj przez residua różnicę obu funkcji po odpowiednich kwadratach. Ewentualnie można zajrzeć do zadania 5.2.1 z Krzyża.

**Zadanie 1.3.** Funkcja całkowita  $f$  spełnia  $|f(z)| < C|z|^n$  dla pewnego  $C$  i  $n$ . Wykaż, że  $f$  jest wielomianem.

**Zadanie 1.4.** Funkcja całkowita  $f$  jest różnowartościowa. Wykaż, że dla każdego  $z_0$  funkcja  $z \mapsto \frac{1}{f(z)-z_0}$  ma wzrost liniowy.

**Zadanie 1.5.** Uzasadnij, że funkcja całkowita i różnowartościowa jest liniowa.

**Zadanie 1.6.** Przypuśćmy, że  $A_1$  i  $A_2$  są domkniętymi pierścieniami o promieniu zewnętrznym 1 i wewnętrznym odpowiednio  $r_1$  i  $r_2$ . Załóżmy, że  $h$  jest holomorficzna i przeprowadza domknięcie  $A_1$  na domknięcie  $A_2$ .

- Korzystając z zasady odbicia, wykaż, że  $h$  rozszerza się do przekształcenia holomorficznego między nakłutymi dyskami o promieniu 1;
- Korzystając z twierdzenia o usuwaniu osobliwości, rozszerz  $h$  do przekształcenia holomorficznego między dyskami o promieniu 1 (przedłuż przez 0);
- Korzystając z lematu Schwarz'a, lub podobnych technik, uzasadnij, że  $r_1 = r_2$ ;
- Pomęcz się jeszcze, żeby pokazać iż jeśli  $r_1 = r_2$ , to  $h$  musi być obrotem.

**Zadanie 1.7** (Na ostatnie zajęcia). Wykaż, że funkcja  $z \mapsto \bar{z}$  na okręgu jednostkowym nie rozszerza się do funkcji holomorficznej na dysk.

Uwaga: proszę znaleźć możliwie dużo różnych rozwiązań.

Dla osób, które nie będą zadowolone z liczby punktów za ćwiczenia: można się będzie zgłaszać do spisania (porządnego) rozwiązań zadań 1.7, 1.6 i 1.5 (to ostatnie zadanie składa się z trzech części). Termin wysłania: do dnia egzaminu, format: LaTeX (tak żeby można było wrzucić na stronę rozwiązania).