1. Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 3.

Zadanie 1.1. Przypuśćmy, że U jest obszarem w kole jednostkowym zaś $f\colon U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna (różniczkowalna w sensie zespolonym). Niech $\overline{U}$ będzie obrazem U przy inwersji. Czy któraś z funkcji $g\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ zadana wzorem $g(z) = \overline{f(\overline{z}^{-1})}$ czy $h(z) = f(\overline{z}^{-1})$ jest holomorficzna? Jak wygląda jej obraz?

Zadanie 1.2. Znajdź przekształcenie przekształcające wycinek koła $|z| < 1$, $0 < \arg z < \alpha$ (dla dowolnego $\alpha < 2\pi$) na pierwszą ćwiartkę.

Zadanie 1.3. Oblicz całki $\int_\gamma e^z/z\,dz$, $\int_\gamma \sin z/z^2\,dz$, $\int_\gamma \cos z/z^5\,dz$, gdzie γ jest okręgiem o promieniu 3.

Zadanie 1.4. Rozwiń w szereg potęgowy od z i/lub z^{-1} funkcję $\frac{z}{(z-\frac{3}{2})(z-\frac{1}{2})}$ w taki sposób, aby szereg był zbieżny na okręgu jednostkowym. Określ, dla jakich z taki szereg jest zbieżny.

Zadanie 1.5. Wykaż, że funkcja $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$ daje się dobrze określić dla $|z| > 2$.

Uwaga: to zadanie można zrobić na dwa niezależne sposoby. Jeden przez homografię, drugi zupełnie inny.