

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Maria Donten

Nr albumu: 209516

Rozmaitości Kummera

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA
w zakresie MATEMATYKI OGÓLNEJ

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jarosława Wiśniewskiego
Instytut Matematyki

Maj 2008

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Definiujemy uogólnienie konstrukcji rozmaitości algebraicznych, która pochodzi od Kummera. Przedstawiamy działanie uogólnionej konstrukcji w przypadku dwuwymiarowym, dla którego wyniki są powierzchniami K3. Klasyfikujemy skończone podgrupy $SL(3, \mathbb{Z})$. Badamy wyniki trójwymiarowego przypadku konstrukcji Kummera dla otrzymanych 16 grup — celem jest znalezienie liczb Bettiego konstruowanych rozmaitości. Przedstawiamy szczegółową analizę kilku przykładów, w pozostałych przypadkach podajemy wielomian Poincaré oraz wybrane pośrednie wyniki obliczeń.

Słowa kluczowe

konstrukcja Kummera, rozmaitość abelowa, reprezentacja liniowa, osobliwość ilorazowa, rozwiązanie osobliwości, stratyfikacja, wirtualny wielomian Poincaré

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

wg AMS MSC 2000: 14J32, 20C10, 14F43, 14J17

Tytuł pracy w języku angielskim:

Kummer varieties

Spis treści

Wprowadzenie	5
1. Uogólniona konstrukcja Kummera	7
2. Produkt dwóch krzywych eliptycznych	11
3. Skończone podgrupy $SL(3, \mathbb{Z})$	19
4. Konstrukcja rozmaitości trójwymiarowych	27
5. Przykłady	33
6. Wyniki obliczeń	43

Wprowadzenie

Obecnie ważnym obiektem badań geometrii algebraicznej są rozmaitości Calabi–Yau. Interesują się nimi także fizycy — trójwymiarowe rozmaitości Calabi–Yau stanowią istotny element teorii strun. Badana jest między innymi własność symetrii lustrzanej (*mirror symmetry*). Hipotezy stawiane są w oparciu o znane przykłady. Nie istnieje klasyfikacja rozmaitości Calabi–Yau. Pojawiają się natomiast prace opisujące i klasyfikujące znane rozmaitości Calabi–Yau, np. jako zupełne przecięcia w rozmaitościach torycznych. Wiele prac proponuje metody konstrukcji przykładów, w tym również prowadzące do otrzymywania lustrzanych par rozmaitości Calabi–Yau.

W pracy [AW08] Marco Andreatta i Jarosław Wiśniewski opisali uogólnienie klasycznej konstrukcji Kummera. Uogólniona konstrukcja pozwala otrzymywać rozmaitości poprzez analizę działania skończonych grup liniowych na rozmaitościach abelowych i rozwiązania osobliwości. W wymiarach 2 i 3 wynikiem konstrukcji są rozmaitości Calabi–Yau, w wyższych wymiarach pojawiają się także rozmaitości symplektyczne. W tej pracy rozpatrujemy dwuwymiarowy i trójwymiarowy przypadek konstrukcji. Głównym rezultatem jest wyznaczenie liczb Bettięgo wszystkich trójwymiarowych rozmaitości Kummera. Przy okazji otrzymujemy klasyfikację skończonych niecyklicznych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$ z dokładnością do sprzężenia w $GL(3, \mathbb{Z})$.

Pracę rozpoczyna opis uogólnionej konstrukcji Kummera i jej własności, na podstawie [AW08]. W rozdziale 2. przedstawiamy działanie konstrukcji w przypadku dwuwymiarowym, dla którego wynikiem są powierzchnie K3. Na przykładzie tego przypadku wprowadzamy metodę użytą również do obliczeń w przypadku trójwymiarowym — wirtualne wielomiany Poincaré i stratyfikację rozmaitości. Obliczamy liczby Bettięgo dwuwymiarowych rozmaitości Kummera. Otrzymany wynik jest zgodny z powszechnie znanymi wartościami tych niezmienników dla powierzchni K3. Dalsze rozdziały dotyczą głównego wyniku pracy — wyznaczenia liczb Bettięgo trójwymiarowych rozmaitości Kummera. Omówiony jest problem klasyfikacji skończonych niecyklicznych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$, dla których przeprowadzamy konstrukcję. Rozdział 4. stanowi wprowadzenie teoretyczne do obliczeń w przypadku trójwymiarowym. Opisuje rozważaną stratyfikację trójwymiarowych rozmaitości Kummera, występujące w konstrukcji rozwiązania osobliwości oraz metody liczenia ich kohomologii. Ostatnie dwa rozdziały zawierają wyniki obliczeń. Obliczenia zostały opisane dokładnie w trzech ciekawych przypadkach (rozdział 5). Dla pozostałych przypadków oprócz wartości liczb Bettięgo rozmaitości podane zostały także pewne pośrednie wyniki (rozdział 6).

Otrzymane wyniki nasuwają kilka pytań. Okazuje się, że liczby Bettięgo nie rozróżniają wszystkich rozmaitości Kummera w przypadku trójwymiarowym. W szczególności dla dualnych (przez transpozycję macierzy) podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$ konstruowane rozmaitości mają takie same liczby Bettięgo, ale nie wiemy, czy są one izomorficzne. Być może te rozmaitości są rozróżniane przez jakieś inne niezmienniki. Jeśli tak, to można zapytać, czy dla konstrukcji w wyższych wymiarach dualne grupy również prowadzą do rozmaitości o tych samych liczbach Bettięgo.

Rozdział 1

Uogólniona konstrukcja Kummera

1.1. Klasyczna konstrukcja Kummera

Klasyczna wersja konstrukcji Kummera, do której istnieje wiele odwołań w literaturze (np. [Ku75]), polega na rozpatrzeniu działania grupy \mathbb{Z}_2 na powierzchni abelowej A przez involucję ($x \mapsto -x$). To działanie ma 16 punktów stałych — rozwiązań równania $2x = 0$ na powierzchni abelowej. Poza zbiorem punktów stałych działanie oczywiście jest wolne. Obrazy punktów stałych w ilorazie $Y = A/\mathbb{Z}_2$ są osobliwe. Powstałe osobliwości są ilorazowe (analitycznie osobliwości są lokalnie izomorficzne z ilorazem $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$). Można skonstruować rozwiązanie osobliwości, czyli gładką rozmaitość X oraz biwymierny morfizm $\varphi: X \rightarrow Y$, który jest izomorfizmem poza zbiorem punktów osobliwych. Wystarczy rozdmuchać punkty osobliwe powierzchni Y . Wtedy przeciwobrazy punktów osobliwych w rozmaitości X to krzywe izomorficzne z \mathbb{P}^1 , o samoprzecięciu -2 . Otrzymana powierzchnia X jest powierzchnią K3, czyli ma zerowy dywizor kanoniczny oraz $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Można udowodnić, że powierzchnie K3 są jednospójne, a stąd wynika, że $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ — ten warunek będzie istotny później.

Pomysł na uogólnienie konstrukcji jest taki, żeby działanie \mathbb{Z}_2 na powierzchni abelowej zastąpić działaniem skończonych grup macierzy wymiaru r na produkcie r rozmaitości abelowych. Będziemy dążyć do zachowania własności $K_X = 0$ i $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$, więc przyjmujemy pewne dodatkowe założenia.

1.2. Uogólnienie konstrukcji

Badane uogólnienie konstrukcji Kummera, podstawowe twierdzenia oraz używana notacja pochodzą z pracy Andreatty i Wiśniewskiego [AW08].

Niech A oznacza rozmaitość abelową wymiaru d . Będziemy rozpatrywać produkt A^r dla $r \geq 2$. Przez G oznaczmy grupę skończoną, która posiada reprezentację w macierzach całkowitoliczbowych wymiaru r , oznaczaną dalej przez $\rho: G \rightarrow GL(r, \mathbb{Z})$.

Punkty A^r są postaci (a_1, \dots, a_r) , gdzie wszystkie $a_i \in A$. Grupa G działa na A^r przez reprezentację ρ : punkt (a_1, \dots, a_r) możemy pomnożyć przez macierz z $\rho(G)$, otrzymując w wyniku punkt z A^r . To działanie jest algebraiczne, ponieważ dodawanie punktów na rozmaitości abelowej jest regularne. Pierwszy krok konstrukcji to przejście do ilorazu A^r przez to działanie — $Y = A^r/\rho(G)$ (często będziemy używać oznaczenia A^r/G , jeśli nie spowoduje to niejasności).

Tak jak w klasycznej konstrukcji, zazwyczaj nie we wszystkich punktach A^r działanie $\rho(G)$

jest wolne. Iloraz Y zawiera domknięty podzbiór punktów osobliwych, odpowiadający orbitem o nietrywialnej grupie izotropii. Rozmaitość abelowa A^r jest ilorazem \mathbb{C}^{rd} przez pewną kratę, a działanie $\rho(G)$ na A^r jest indukowane przez działanie $d \cdot \rho(G)$ (sumy prostej d kopii reprezentacji ρ) na \mathbb{C}^{rd} przez przekształcenia liniowe. Stąd wynika, że na pewnym analitycznym otoczeniu punktu $p \in A^r$ o nietrywialnej grupie izotropii G_p to działanie jest równoważne z działaniem $d \cdot \rho(G_p)$ na \mathbb{C}^{rd} , czyli osobliwości Y to osobliwości ilorazowe \mathbb{C}^{rd}/G_p . Drugim krokiem konstrukcji jest rozwiązanie osobliwości w Y . Otrzymana w ten sposób rozmaitość, oznaczana dalej przez X , to wynik uogólnionej konstrukcji Kummera.

1.3. Dodatkowe założenia i własności

Przyjmujemy kilka dodatkowych założeń, żeby otrzymywane rozmaitości miały pewne ważne własności. Na podstawie [AW08] omawiamy te własności oraz przyjmowane założenia:

- Rozpatrujemy uogólnioną konstrukcję Kummera wyłącznie dla reprezentacji $\rho: G \rightarrow GL(r, \mathbb{Z})$, których jedynym punktem stałym jest 0. Wówczas otrzymywane rozmaitości spełniają $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$.
- Jeśli d jest nieparzyste, ograniczamy się do rozpatrywania reprezentacji $\rho: G \rightarrow SL(r, \mathbb{Z})$. Wówczas $d \cdot \rho$ działa bez pseudoodbici i zachowuje dywizor kanoniczny. Dla d parzystych to jest automatycznie spełnione, niezależnie od reprezentacji ρ .
- Przyjmujemy, że rozwiązania osobliwości $\varphi: X \rightarrow Y$ są krepantne, czyli $K_X = \varphi^*(K_Y)$. To założenie pozwala wykazać, że w uogólnionej konstrukcji Kummera otrzymujemy rozmaitości z trywialnym dywizorem kanonicznym.

Poniższy lemat pozostawimy bez szczegółowego dowodu, jako że problem rzutowości otrzymywanych rozmaitości nie jest przedmiotem naszych rozważań.

Lemat 1.1. *Można skonstruować rozwiązanie osobliwości ilorazu A^r/G tak, żeby otrzymana rozmaitość X była rzutowa.*

Oczywiście A^r jest rozmaitością rzutową. Stąd można wywnioskować, że A^r/G jest rzutowa. Wykazanie rzutowości X wymaga analizy konstrukcji rozwiązania osobliwości. W niskowymiarowych przypadkach, którymi zajmuje się ta praca, rozwiązania można dokładnie opisać. Wobec tego dowód rzutowości X nie powinien być trudny. Ponieważ ten fakt nie ma dużego znaczenia dla wyników pracy, pomijamy dowód.

Przyjęte powyżej założenia zapewniają, że w przypadku dwuwymiarowym ($d = 1, r = 2$) otrzymywane rozmaitości są powierzchniami K3, a w przypadku trójwymiarowym ($d = 1, r = 3$) są rozmaitościami Calabi–Yau.

Ponadto rozmaitości otrzymywane przez uogólnioną konstrukcję Kummera mają własności opisywane przez następujące lematy:

Lemat 1.2. *Jeśli dwie reprezentacje ρ i ρ' podgrupy G są sprzężone w $GL(r, \mathbb{Z})$, to konstrukcja daje dla nich w wyniku izomorficzne rozmaitości.*

Dowód. To wynika z faktu, że przekształcenie $C: A^r \rightarrow A^r$ zadane przez macierz sprzęgającą podgrupy $\rho(G)$ i $\rho'(G)$ jest po prostu zmianą współrzędnych na rozmaitości A^r . Wobec

tego możemy badać wyniki konstrukcji tylko dla reprezentantów klas sprzężoności skończonych podgrup $GL(r, \mathbb{Z})$. □

Lemat 1.3. *Niech G i H będą skończonymi podgrupami $GL(r, \mathbb{Z})$ takimi, że w G jest podgrupa H' sprzężona z H . Wówczas istnieje wymierne odwzorowanie z rozmaiłości Kummera dla grupy H w rozmaiłość Kummera dla grupy G .*

Dowód. Niech A będzie rozmaiłością abelową. Przyjrzyjmy się ilorazom $Y = A^r/G$ oraz $Y' = A^r/H \simeq A^r/H'$. Ponieważ $H' < G$, mamy przekształcenie regularne $f: Y' \rightarrow Y$. Przez X i X' oznaczmy rozmaiłości otrzymane w uogólnionej konstrukcji Kummera odpowiednio dla grup G i H . Z definicji rozwiązania osobliwości X jest biwymierne równoważna z Y , a X' z Y' . Złożenie odwzorowań zadających te równoważności z przekształceniem f jest wymiernym przekształceniem X' w X . □

1.4. Cel pracy

W tej pracy pokazane jest działanie uogólnionej konstrukcji Kummera w niskowymiarowych przypadkach. Dalej przyjmujemy, że $d = 1$, czyli rozmaiłość abelowa A jest krzywą eliptyczną. Wobec tego będziemy zajmować się reprezentacjami skończonych grup w $SL(r, \mathbb{Z})$. Interesują nas przypadki $r = 2$ i $r = 3$.

Celem jest policzenie kohomologii otrzymywanych rozmaiłości. Będziemy liczyć kohomologie De Rhama o współczynnikach zespolonych. Nie chcemy zajmować się strukturą multiplikatywną w kohomologiach, więc wystarczy podać wymiary odpowiednich przestrzeni — liczby Bettię, w formie wielomianów Poincaré.

Definicja 1.4.1. *Wielomian Poincaré rozmaiłości X to wielomian jednej zmiennej t , dla którego współczynnikiem przy t^k jest liczba Bettię $b_k(X)$, czyli wymiar przestrzeni $H^k(X, \mathbb{C})$ kohomologii De Rhama o współczynnikach zespolonych: $P_X(t) = \sum_k b_k(X)t^k$.*

Przypadek uogólnionej konstrukcji Kummera dla $r = 2$, opisany w rozdziale 2., okazał się łatwy. Do zbadania są tylko cztery grupy o prostej strukturze. Powstające osobliwości to dobrze znane osobliwości Du Vala typu A_n (zob. np. [Re]). Otrzymane powierzchnie to powierzchnie typu K3, których kohomologie zostały policzone w różnych źródłach na wiele sposobów, więc można zweryfikować wynik.

Przypadek $r = 3$, którym zajmują się dalsze cztery rozdziały pracy, jest dużo bardziej skomplikowany. Po pierwsze, problemem okazała się klasyfikacja skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$ z dokładnością do sprzężenia w $GL(3, \mathbb{Z})$. Nie udało się znaleźć żadnego źródła, w którym byłaby opisana — jest to bardzo stary i widocznie mało przydatny wynik. Rozdział 4. opisuje, w jaki sposób ta klasyfikacja ostatecznie została opracowana. Po drugie, struktura działania grup liniowych na rozmaiłości A^3 jest dużo bardziej złożona niż w przypadku $r = 2$. Trzeba przyjąć dodatkowe założenia dotyczące rozwiązań osobliwości — będziemy rozważać rozwiązania, które tworzą wiązki lokalnie trywialne w topologii analitycznej nad krzywymi punktów o jednakowej grupie izotropii. Przy tych założeniach można policzyć kohomologie otrzymywanych rozmaiłości.

1.5. Schemat obliczeń

W tej części przedstawiamy szkieletowo podejście do problemu obliczania kohomologii rozmaitości Kummera. Obliczenia składają się z dwóch części. Pierwsza to znalezienie kohomologii ilorazu $Y = A^r/G$. Druga to zrozumienie rozwiązań osobliwości i ich wkładu w kohomologie rozmaitości X .

Wyznaczenie kohomologii ilorazu A^r/G nie jest trudne (również obliczeniowo). Kohomologie rozmaitości abelowych są dobrze znane — wielomian Poincaré rozmaitości abelowej wymiaru d to $(1+t)^{2d}$. Działanie G indukuje działanie na kohomologiach A^r . Kohomologie A^r/G to podprzestrzeń punktów stałych tego działania, którą można wyznaczyć, używając podstawowych faktów z teorii reprezentacji. Dokładny opis znajduje się w punkcie 2.3.

Zrozumienie zmian w kohomologiach Y powodowanych przez rozwiązanie osobliwości wymaga użycia pewnych narzędzi. Badamy stratyfikację rozmaitości Y związaną z działaniem G — rozkład na zbiory orbit punktów o tej samej grupie izotropii. Wykorzystujemy ciekawą własność rozmaitości algebraicznych: każdej rozmaitości, niekoniecznie zwartej, można przyporządkować tzw. wirtualny wielomian Poincaré. Te wielomiany dla „porządných” rozmaitości zgadzają się z prawdziwymi wielomianami Poincaré, oraz są addytywne ze względu na rozbięcie rozmaitości na domknięty algebraiczny podzbiór i jego dopełnienie. Dzięki temu umiemy policzyć wkład rozwiązań osobliwości w kohomologie A^r/G . Używane twierdzenia są opisane w punkcie 2.4.

Metody stosowane podczas obliczeń zostały przedstawione ze szczegółami w rozdziale 2, na przykładzie rozmaitości dwuwymiarowych. Dzięki temu podczas opisu przypadku trójwymiarowego możemy skoncentrować się na pojawiających się tam problemach, nie tłumacząc działania podstawowych elementów schematu obliczeń.

Poniżej przypominamy oznaczenia i ogólne własności dotyczące działania grup na zbiorach, istotne dla tej pracy.

1.6. Działanie grup na zbiorach

Niech grupa G działa na przestrzeni topologicznej Z . Przez Z^H będziemy oznaczać zbiór punktów stałych podgrupy $H < G$.

Jeśli $H < G$ i $H' = gHg^{-1}$, to mamy równość $Z^{H'} = gZ^H$, czyli zbiory punktów stałych dla sprzężonych podgrup są utożsamiane w ilorazie Z/G .

Dla podgrupy $H < G$ przez $N_G(H)$, lub $N(H)$, jeśli grupa G będzie znana z kontekstu, oznaczamy normalizator podgrupy H w G , natomiast przez $W_G(H)$ lub $W(H)$ — grupę Weyla, czyli iloraz $N_G(H)/H$. Z powyższego stwierdzenia wynika, że jeśli $g \in N_G(H)$, to $Z^H = gZ^H$, czyli normalizator podgrupy H działa na zbiorze punktów stałych tej podgrupy. Z definicji każdy element $g \in H$ działa trywialnie na Z^H , więc mamy działanie $W_G(H)$ na zbiorze Z^H .

Zauważmy, że jeśli H i H' są sprzężonymi podgrupami G , to ich normalizatory $N_G(H)$ i $N_G(H')$ również są sprzężone w G . Stąd grupy Weyla podgrup z tej samej klasy sprzężoności są izomorficzne.

Rozdział 2

Produkt dwóch krzywych eliptycznych

W tym rozdziale przyjrzymy się konstrukcji Kummera dla produktu dwóch krzywych eliptycznych A^2 , czyli przypadkowi $r = 2$. Na tym przykładzie wprowadzimy narzędzia wykorzystywane również w dalszych obliczeniach.

Zacniemy od znalezienia liczby punktów osobliwych oraz typów osobliwości dla działań podgrup $SL(2, \mathbb{Z})$ na A^2 . Następnie policzymy kohomologie osobliwych powierzchni będących ilorzem A^2 przez działania badanych grup. Opiszemy relację pomiędzy liczbami Bettiego ilorazu A^2 przez działanie grupy i powierzchni powstających poprzez rozwiązanie osobliwości ilorazu. Otrzymamy wartości tych niezmienników dla dwuwymiarowych rozmaitości Kummera.

2.1. Działanie grup skończonych o reprezentacji w $SL(2, \mathbb{Z})$

Według [Ne72] (IX.14, str. 179) wszystkie skończone podgrupy $SL(2, \mathbb{Z})$ są izomorficzne z jedną z grup $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$. Ponadto izomorficzne skończone podgrupy $SL(2, \mathbb{Z})$ są sprzężone w $GL(2, \mathbb{Z})$. Policzymy punkty osobliwe ich działań na produkcie dwóch krzywych eliptycznych, ustalając współrzędne. Wobec tego wybierzemy również konkretne generatory podgrup $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_3 & \mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_6 \\ \hline \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

W celu uproszczenia opisu generator \mathbb{Z}_6 jest tak dobrany, że podniesiony do kwadratu daje wybrany generator \mathbb{Z}_3 .

Przez (a, b) będziemy oznaczać punkt rozmaitości A^2 , czyli parę punktów pochodzących z krzywej eliptycznej. Możemy założyć, że $a, b \in \mathbb{C}$ oraz a i b leżą w obszarze fundamentalnym działania kraty $L \simeq \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{C}$. Przyjmijmy, że zanurzenie $L \subseteq \mathbb{C}$ przekształca standardowe generatory $\{(1, 0), (0, 1)\} \in \mathbb{Z}^2$ na liniowo niezależny układ $\{v_1, v_2\} \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Wynik, czyli liczba punktów osobliwych i rodzaje osobliwości, nie zależy od wyboru kraty.

2.1.1. Przypadek \mathbb{Z}_2

Nietrywialny element grupy \mathbb{Z}_2 przekształca punkt (a, b) na $(-a, -b)$. Zastanówmy się nad warunkami, które muszą być spełnione, żeby (a, b) miał niezerową grupę izotropii. W tym przypadku to oczywiście oznacza, że musi być punktem stałym działania całej grupy, czyli osobliwości będą tylko jednego rodzaju — lokalnie będą odpowiadać ilorazowi $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$.

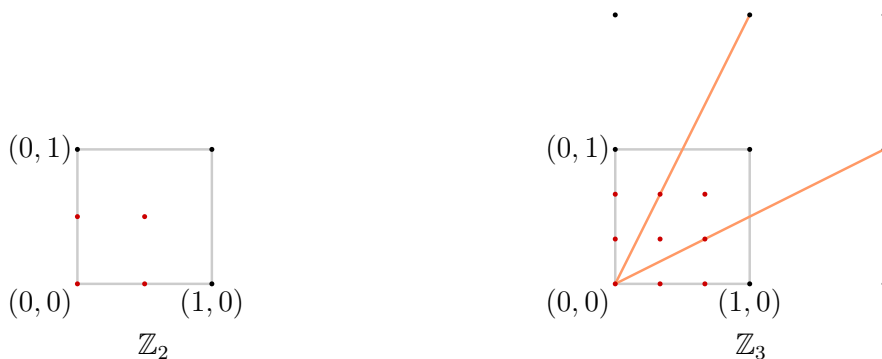
W grupie abelowej A^2 równość $(-a, -b) = (a, b)$ oznacza, że $2a = 0$ oraz $2b = 0$. Ponieważ a i b leżą w obszarze fundamentalnym działania kraty, to każdy z tych punktów może przyjąć cztery różne wartości. Ich współczynniki w bazie $\{v_1, v_2\}$ to odpowiednio: $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (na rysunku poniżej). Stąd w A^2 jest 16 punktów stałych opisanego powyżej działania \mathbb{Z}_2 , wszystkie o grupie izotropii \mathbb{Z}_2 .

2.1.2. Przypadek \mathbb{Z}_3

Obrazy punktu (a, b) przy działaniu kolejnych potęg wybranego generatora grupy \mathbb{Z}_3 tworzą następujący ciąg:

$$(a, b) \mapsto (-b, a - b) \mapsto (b - a, -a).$$

Tak jak poprzednio, każdy punkt o nietrywialnej grupie izotropii jest punktem stałym działania grupy. Szukamy punktów, które spełniają $a = -b = b - a$ oraz $b = a - b = -a$. Z warunków $a = -b$ oraz $2a = b$ wynika $3a = 0$ oraz $3b = 0$. Stąd każdy z punktów a i b może przyjąć jedną z dziewięciu wartości, jak na rysunku. Zauważmy, że założenie, że a i b leżą w obszarze fundamentalnym, wraz z warunkiem $a + b = 0$, wyznaczają jednoznacznie b w zależności od a , czyli jest 9 par (a, b) będących punktami stałymi działania \mathbb{Z}_3 na A^2 .



Rysunek przedstawia punkty stałe działania grup \mathbb{Z}_2 i \mathbb{Z}_3 na A^2 , obcięte do jednej współrzędnej.

2.1.3. Przypadek \mathbb{Z}_4

Ponieważ \mathbb{Z}_4 ma nietrywialną podgrupę \mathbb{Z}_2 , wyznaczoną oczywiście przez kwadrat generatora (będący ustalonym na początku generatorem \mathbb{Z}_2), to mogą się pojawić punkty osobliwe dwóch rodzajów: o grupie izotropii \mathbb{Z}_2 lub \mathbb{Z}_4 . Każdy punkt osobliwy musi być w szczególności punktem stałym działania \mathbb{Z}_2 przez macierz $-I$. Jak policzyliśmy w 2.1.1, tych punktów jest 16. Trzeba tylko sprawdzić, które z nich mają większą grupę izotropii, czyli są zachowywane przez generator \mathbb{Z}_4 . Przeprowadza on (a, b) na $(-b, a)$. Stąd punkty o grupie izotropii \mathbb{Z}_4 spełniają $a + b = 0$, co przy przyjętych założeniach jednoznacznie wyznacza b w zależności od a .

Wobec tego spośród punktów stałych działania \mathbb{Z}_2 cztery są również punktami stałymi działania \mathbb{Z}_4 . Pozostałe 12 ma grupę izotropii równą \mathbb{Z}_2 . Generator \mathbb{Z}_4 parami zamienia te punkty, więc w ilorazie przejdą one na $12/2 = 6$ punktów osobliwych.

2.1.4. Przypadek \mathbb{Z}_6

W tym przypadku pojawiają się trzy rodzaje punktów osobliwych, odpowiadające grupie \mathbb{Z}_6 oraz jej podgrupom \mathbb{Z}_2 i \mathbb{Z}_3 . W 2.1.1 i 2.1.2 policzyliśmy punkty stałe działań \mathbb{Z}_2 i \mathbb{Z}_3 w pewnych współrzędnych. Dzięki temu, że odpowiednio 2. i 3. potęga ustalonego generatora \mathbb{Z}_6 to wybrane generatory \mathbb{Z}_3 i \mathbb{Z}_2 , znamy punkty o grupach izotropii \mathbb{Z}_3 i \mathbb{Z}_2 dla działania \mathbb{Z}_6 w tych współrzędnych. Jeśli natomiast grupą izotropii jakiegoś punktu jest całe \mathbb{Z}_6 , to ten punkt musi leżeć w przecięciu zbioru punktów stałych dla \mathbb{Z}_2 i \mathbb{Z}_3 . Ten warunek spełnia wyłącznie $(0, 0)$, co widać chociażby z rysunku przedstawiającego możliwe wartości jednej ze współrzędnych punktów stałych podgrup \mathbb{Z}_2 i \mathbb{Z}_3 .

Wobec tego działanie \mathbb{Z}_6 na rozmaitości A^2 ma jeden punkt stały. Pozostaje 15 punktów niezmienniczych ze względu na działanie $\mathbb{Z}_2 \subseteq \mathbb{Z}_6$, ale ruszanych z miejsca przez generator \mathbb{Z}_6 . Wewnątrz tego zbioru orbity działania \mathbb{Z}_6 są trzejelementowe, czyli w ilorazie powstanie $15/3 = 5$ punktów osobliwych odpowiadających grupie \mathbb{Z}_2 . Analogicznie z 8 pozostałych po wykluczeniu $(0, 0)$ punktów stałych dla $\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathbb{Z}_6$ powstaną $8/2 = 4$ punkty osobliwe ilorazu, odpowiadające podgrupie \mathbb{Z}_3 .

2.2. Występujące osobliwości i ich rozwiązania

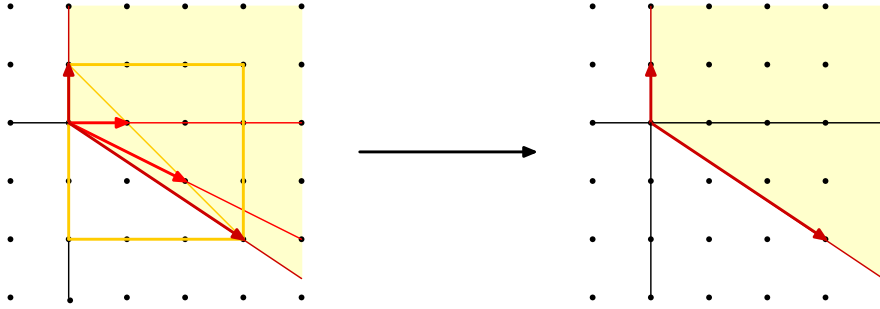
Jeśli przy działaniu skończonej grupy $G < SL(3, \mathbb{Z})$ nietrywialna podgrupa $H < G$ jest grupą izotropii punktu $x \in A^2$, to obraz x w ilorazie A^2/G będzie miał otoczenie izomorficzne z ilorazem \mathbb{C}^2/H (w topologii analitycznej). W rozpatrywanych przypadkach H zawsze jest grupą cykliczną. Wobec tego pojawiające się osobliwości to osobliwości Du Vala typu A_n (zob. np. [Re]). Można je opisać torycznie, tzn. \mathbb{C}^2/H jest toryczne dla wszystkich grup H , które dalej wystąpią. Dokładny opis można znaleźć w [Fu93] (2.2 oraz 2.6). Dla dalszych obliczeń ważne będzie następujące spostrzeżenie:

Lemat 2.1. *Dla minimalnego rozwiązania osobliwości typu A_n przeciwobrazem punktu osobliwego jest łańcuch n krzywych \mathbb{P}^1 .*

Dowód. Bardziej ogólna wersja tego lematu pojawia się jako ćwiczenie w [Fu93] i [Wi95]. W dowodzie przyjrzymy się \mathbb{C}^2/H dla $H \simeq \mathbb{Z}_n$ jako rozmaitości torycznej i skorzystamy z własności rozmaitości torycznych opisanych w rozdziale 2.6 w [Fu93]. Tej rozmaitości odpowiada stożek rozpięty przez wektory $(0, 1)$ i $(n, -n + 1)$. Jeśli podzielimy go na mniejsze stożki, z których każdy będzie generowany przez pewną bazę kraty, to otrzymamy wachlarz gładkiej rozmaitości torycznej. Zauważmy, że wektory rozpinające wyjściowy stożek są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu o boku n . Szukany podział stożka jest wyznaczony przez wektory kończące się na przekątnej tego kwadratu. Łatwo sprawdzić, że każda para sąsiednich dodanych promieni tworzy bazę kraty.

W przeciwobrazie punktu $0 \in \mathbb{C}^2/H$, któremu odpowiada wnętrze wyjściowego stożka, znajduje się $n - 1$ krzywych, którym odpowiadają dodane promienie. Krzywe odpowiadające sąsiednim promieniom przecinają się w jednym punkcie, któremu odpowiada wnętrze stożka wyznaczonego przez te promienie.

Rysunek ilustruje dowód dla $H \simeq \mathbb{Z}_3$.



□

Opisane powyżej minimalne rozwiązania osobliwości typu A_n są krepantne (zob. [Wi95], rozdział 6., lub [Re]), więc spełniają przyjęte w punkcie 1.3 założenia.

2.3. Kohomologie ilorazów

Policzymy kohomologie osobliwego ilorazu rozmaitości A^2 przez działanie skończonych podgrup $G < SL(2, \mathbb{Z})$. Skorzystamy przy tym z twierdzenia III.7.2 w [Br72], które dla rozpatrywanych w tej pracy rozmaitości i działań grup pozwala wnioskować, że kohomologie (zespólone) ilorazu są izomorficzne z punktami stałymi indukowanego działania G na kohomologiach. Twierdzenie odnosi się do teorii Čecha, która jednak w rozpatrywanych przypadkach jest izomorficzna z teorią De Rhama. Ponieważ rozmaitość A^2 jest gładka, możemy na niej rozpatrywać kohomologie De Rhama i liczyć punkty stałe działania G na kohomologiach badając działanie na przestrzeni form różniczkowych. Nie ma znaczenia, że iloraz już nie jest gładki.

Ponieważ działanie G jest liniowe, to jest identyczne z indukowanym działaniem na przestrzeniach stycznych. Mamy indukowane działanie na grupach kohomologii, czyli reprezentację G na kohomologiach A^2 . Ta reprezentacja obcięta do H^k to odpowiednia potęga zewnętrzna reprezentacji dualnej do wyjściowej reprezentacji G . W tej sytuacji można wyznaczyć podprzestrzenie niezmiennicze za pomocą standardowych narzędzi teorii reprezentacji. Dokładniej, korzystając z wzorów podanych w rozdziale 2. [FH91] można policzyć charakterystyki potęg zewnętrznych badanej reprezentacji. Te dane pozwalają wyznaczyć wymiar podprzestrzeni trywialnej, czyli podprzestrzeni niezmienniczej działania na kohomologiach (wzór 2.9 w [FH91]). Obliczenia zostały wykonane za pomocą funkcji w programie GAP ([GAP]), opartej na wymienionych wzorach. Funkcja przydała się głównie w obliczeniach dla przypadku trójwymiarowego, omawianego w następnych rozdziałach pracy, ponieważ w przypadku dwuwymiarowym wzory są bardzo proste.

Otrzymujemy następujące wielomiany Poincaré ilorazów $Y = A^2/G$:
dla $G \simeq \mathbb{Z}_2$

$$P_Y(u, v) = t^4 + 6t^2 + 1,$$

natomiast dla pozostałych grup

$$P_Y(u, v) = t^4 + 4t^2 + 1.$$

2.4. Wpływ rozwiązania osobliwości na kohomologie

Kohomologie rozmaitości Kummera policzymy korzystając z procedury podobnej do tej zaproponowanej przez Fultona w [Fu93] (4.5, str. 92) dla rozmaitości torycznych. Głównym potrzebnym rezultatem jest istnienie wirtualnych wielomianów Poincaré — niezmienników zdefiniowanych dla dowolnych, również osobliwych, rozmaitości algebraicznych, a w przypadku gładkich i rzutowych rozmaitości pokrywających się ze zwykłymi wielomianami Poincaré. Źródłem twierdzeń dotyczących tych niezmienników są [Ar07] (rozdział 17.2) oraz [Fu93] (rozdział 4.5).

Twierdzenie 2.2. *Każdej rozmaitości algebraicznej Z zdefiniowanej nad \mathbb{C} można przyporządkować wielomian $P_Z(t) \in \mathbb{Z}[t]$ tak, aby spełnione były następujące warunki:*

1. *jeśli Z jest gładką rozmaitością rzutową (lub zwartą), to $P_Z(t) = \sum b_k(Z)t^k$,*
2. *dla dowolnego domkniętego algebraicznego podzbioru $V \subseteq Z$ oraz jego dopełnienia $U = Z \setminus V$ zachodzi równość $P_Z(t) = P_V(t) + P_U(t)$.*

Ponadto tak określone przyporządkowanie jest jednoznaczne.

Na początku przyjrzymy się wirtualnym wielomianom Poincaré dla prostych obiektów. Oczywiście dla n -wymiarowej przestrzeni rzutowej

$$P_{\mathbb{P}^n} = \sum_{k=0}^n t^{2k}.$$

Stąd możemy policzyć wirtualne wielomiany Poincaré dla przestrzeni afinicznych. Niech $Z = \mathbb{P}^n$. Weźmy jeden ze zbiorów ze standardowego pokrycia: $\mathbb{A}^n \simeq U \subseteq Z$. Wówczas $Z \setminus U$ jest domkniętym podzbiorem algebraicznym Z , izomorficznym z \mathbb{P}^{n-1} . Z addytywności

$$P_{\mathbb{A}^n}(t) = P_Z(t) - P_{Z \setminus U}(t) = P_{\mathbb{P}^n}(t) - P_{\mathbb{P}^{n-1}}(t) = t^{2n}.$$

Niech Y będzie jednym z badanych ilorazów rozmaitości A^2 przez działanie grupy skończonej, a $\pi: X \rightarrow Y$ rozwiązaniem osobliwości. Rozbijamy Y na sumę domkniętego algebraicznego podzbioru S złożonego ze wszystkich punktów osobliwych oraz jego dopełnienia $U = Y \setminus S$. Wtedy $R = \pi^{-1}(S)$ jest domkniętym algebraicznym podzbiorem X , natomiast obcięcie π do $\pi^{-1}(U)$ jest izomorfizmem.

Naszym celem jest policzenie liczb Bettiego dla X . To jest gładka i zwarta rozmaitość, więc jej wirtualny wielomian Poincaré daje poprawne wyniki wymiarów przestrzeni kohomologii dla X . Ponieważ $X \setminus R \simeq U \simeq Y \setminus S$, z addytywności wynika

$$P_X(t) = P_Y(t) - P_S(t) + P_R(t) = P_Y(t) + P_R(t) - |S|,$$

gdzie $|S|$ oznacza moc zbioru S .

Aby policzyć $P_X(t)$, musimy znać wirtualny wielomian Poincaré rozmaitości Y . Okazuje się, że jest on zgodny z prawdziwym wielomianem Poincaré dla Y . Tak jest zawsze, jeśli rozmaitość ma wyłącznie osobliwości ilorazowe (szkic argumentacji można znaleźć w [Fu93], w rozdziale 4.5, str. 94). Kohomologie Y zostały policzone w części 2.3, pozostaje więc tylko policzyć $P_R(t)$.

Przeciwbraz każdego punktu osobliwego jest domknięty w R , więc

$$P_R(t) = \sum_{x \in S} P_{\pi^{-1}(s)}(t).$$

Weźmy $s \in S$, przeciwbraz tego punktu osobliwego oznaczmy przez R_s . Rozwiązując osobliwości typu A_n w przeciwbrazie punktu osobliwego otrzymamy łańcuch krzywych \mathbb{P}^1 (sąsiednie krzywe przecinają się transversalnie w jednym punkcie) długości n . Jeśli osobliwość w s jest typu A_1 , to $\pi^{-1}(s) \simeq \mathbb{P}^1$, więc $P_{\pi^{-1}(s)}(t) = t^2 + 1$. Jeśli łańcuch krzywych ma długość n , to $\pi^{-1}(s)$ można rozbić na sumę łańcucha $n - 1$ krzywych \mathbb{P}^1 oraz otwartego algebraicznego podzbioru izomorficznego z \mathbb{A}^1 (powstałego z ostatniej krzywej z łańcucha przez wyjęcie punktu przecięcia z inną krzywą). Wobec tego przez indukcję $P_{\pi^{-1}(s)}(t) = nt^2 + 1$, jeśli w s jest osobliwość typu A_n . Zatem jeśli przez n_s oznaczmy typ osobliwości w punkcie s , otrzymamy

$$P_R(t) = \sum_{s \in S} (n_s t^2 + 1) = \left(\sum_{s \in S} n_s \right) t^2 + |S|.$$

Stąd ogólny wzór

$$P_X(t) = P_Y(t) + \left(\sum_{s \in S} n_s \right) t^2.$$

czyli

$$b_k(X) = \begin{cases} b_k(Y) + \sum_{s \in S} n_s & \text{jeśli } k = 2; \\ b_k(Y) & \text{dla pozostałych wartości } k. \end{cases}$$

2.5. Podsumowanie obliczeń

Tabela podsumowuje wykonane obliczenia. Kolumny zawierają następujące informacje:

- **grupa** — grupa działającą na rozmaitości A^2 ,
- **osobliwości** — typy osobliwości i liczby odpowiadających im punktów w ilorazie A^2 przez działanie badanej grupy,
- **kohomologie ilorazu** — wielomian Poincaré ilorazu,
- **wkład rozwiązania** — czynnik dodawany do wielomianu Poincaré ilorazu w celu otrzymania wielomianu rozwiązania osobliwości.

grupa	osobliwości	kohomologie ilorazu	wkład rozwiązania
\mathbb{Z}_2	A_1 (16)	$t^4 + 6t^2 + 1$	$16 \cdot t^2$
\mathbb{Z}_3	A_2 (9)	$t^4 + 4t^2 + 1$	$9 \cdot 2t^2$
\mathbb{Z}_4	A_1 (6) A_3 (4)	$t^4 + 4t^2 + 1$	$6 \cdot t^2 + 4 \cdot 3t^2$
\mathbb{Z}_6	A_1 (5) A_2 (4) A_5 (1)	$t^4 + 4t^2 + 1$	$5 \cdot t^2 + 4 \cdot 2t^2 + 1 \cdot 5t^2$

Stąd, po zsumowaniu dwóch ostatnich kolumn, otrzymujemy wielomian Poincaré, taki sam dla wszystkich skonstruowanych rozmaitości:

$$P_X(t) = t^4 + 22t^2 + 1.$$

Wynik jest zgodny z oczekiwaniami — współczynniki wyliczonego wielomianu są takie, jak wymiary przestrzeni kohomologii wszystkich powierzchni K3, do których należą powierzchnie Kummera.

Rozdział 3

Skończone podgrupy $SL(3, \mathbb{Z})$

Pierwszym krokiem w klasyfikacji trójwymiarowych rozmaitości Kummera jest znalezienie grup, dla których przeprowadzimy konstrukcję, czyli reprezentantów klas sprzężoności skończonych niecyklicznych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$. W przypadku dwuwymiarowym można było powołać się na źródło [Ne72], gdzie podano generatory reprezentantów wszystkich czterech klas sprzężoności skończonych podgrup $SL(2, \mathbb{Z})$. Dla wyższych wymiarów grup jest istotnie więcej i nie udało się znaleźć źródła, w którym byłyby podane.

Ten i dalsze rozdziały tej pracy można w pewnym sensie traktować jako dowód twierdzenia o klasyfikacji skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$ z dokładnością do sprzężoności w $GL(3, \mathbb{Z})$. Najpierw obliczenia komputerowe, wykonane za pomocą pakietów CARAT ([CARAT]) i GAP ([GAP]), pozwoliły wyznaczyć zbiór skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$, który z pewnością zawiera reprezentanty wszystkich klas sprzężoności. Następnie badanie działania tych grup liniowych na rozmaitości A^3 pozwoliło wykazać, że w wyliczonym zbiorze istnieje dokładnie jeden reprezentant każdej klasy sprzężoności.

Pierwsza część rozdziału podaje podstawowe fakty dotyczące skończonych grup macierzy całkowitoliczbowych, a także pewne wnioski istotne dla badania trójwymiarowych rozmaitości Kummera. Dalszy ciąg to opis algorytmu, za pomocą którego został wyznaczony stosunkowo nieduży zbiór skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$, zawierający reprezentanty wszystkich klas sprzężoności, oraz uzasadnienie jego poprawności.

Kod wszystkich funkcji w programie GAP napisanych w celu wykonania obliczeń potrzebnych w tej pracy można znaleźć na stronie http://students.mimuw.edu.pl/~md209516/prog_gap.

3.1. Skończone podgrupy $GL(n, \mathbb{Z})$

W tej części spróbujemy przedstawić możliwe podejścia do algebraicznej strony zagadnienia uogólnionej konstrukcji Kummera, czyli klasyfikacji skończonych podgrup $GL(n, \mathbb{Z})$ (ewentualnie $SL(n, \mathbb{Z})$) z dokładnością do sprzężenia w $GL(n, \mathbb{Z})$.

Przez $M_n(\mathbb{Z})$ oznaczamy zbiór wszystkich, niekoniecznie odwracalnych, macierzy $n \times n$ o współczynnikach całkowitych.

3.1.1. Redukcja do $GL(n, \mathbb{Z}_m)$

Przed wszystkim zamiast rozpatrywać $GL(n, \mathbb{Z})$, gdzie *a priori* podgrupy skończone (w szczególności cykliczne) mogłyby mieć dowolnie duży skończony rząd, możemy się ograniczyć do badania podgrup $GL(n, \mathbb{Z}_m)$ dla dowolnej liczby całkowitej $m > 2$. Za [Ne72] (rozdziały IX.11 i IX.12) podajemy odpowiednie twierdzenie i lematy:

Twierdzenie 3.1 (Minkowski). *Jeśli $G < GL(n, \mathbb{Z})$ jest podgrupą skończoną, to jest ona izomorficzna z pewną podgrupą $GL(n, \mathbb{Z}_m)$ dla dowolnej liczby naturalnej $m > 2$.*

Izomorfizm ten jest zadany przez homomorfizm $\nu_m: GL(n, \mathbb{Z}) \rightarrow GL(n, \mathbb{Z}_m)$ będący redukcją modulo m na współrzędnych macierzy. Załóżmy, że na pewnej skończonej podgrupie G nie jest on izomorfizmem. Wtedy istnieje $g \in G \cap \ker \nu_m$, $g \neq I$, której rząd jest liczbą pierwszą p . Następujący lemat zapewnia, że taka sytuacja nie może się zdarzyć.

Lemat 3.2. *Jeśli $A \in M_n(\mathbb{Z})$, $A^p = I$ dla pewnej liczby pierwszej p , oraz $\nu_m(A) = I$ dla liczby całkowitej $m > 2$, to $A = I$.*

Dowód lematu jest rachunkowy, w istotny sposób korzysta z założenia, że $m > 2$, ale można go wzmocnić tak, żeby uzyskać pewne rezultaty również w tym przypadku. Założenia o pierwszości p można się pozbyć, stosując indukcyjnie lemat 3.2.

Lemat 3.3. *Niech $A \in M_n(\mathbb{Z})$, $A^k = I$ dla pewnej liczby całkowitej k , oraz $\nu_m(A) = I$ dla liczby całkowitej m . Wówczas jeśli $m > 2$, to $A = I$, a jeśli $m = 2$, to $A^2 = I$.*

Sensownym podejściem do problemu klasyfikacji skończonych podgrup $GL(n, \mathbb{Z})$ wydaje się więc badanie podgrup $GL(n, \mathbb{Z}_3)$ i ich podniesień do $GL(n, \mathbb{Z})$. Być może jakieś ciekawe rezultaty można uzyskać, patrząc na $GL(n, \mathbb{Z}_m)$ dla $m > 3$, albo dla $m = 2$ przy ograniczeniach wynikających z lematu 3.3. Jednak te metody nie doprowadziły do sklasyfikowania skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$ i nie będziemy się nimi dalej zajmować.

3.1.2. Analiza w $GL(n, \mathbb{C})$

Pewne informacje o postaci macierzy z $GL(n, \mathbb{Z})$ skończonego rzędu można uzyskać przechodząc do ciała liczb zespolonych. Rozpatrując działanie różniczkę przekształcenia zadanego przez macierz o współczynnikach całkowitych na rozmaitości abelowej możemy zmienić bazę na dowolną zespoloną, rezygnując z reprezentacji całkowitoliczbowej. Wobec tego informacje uzyskane przez przejście nad ciało liczb zespolonych niewątpliwie będą przydatne.

Zauważmy, że jeśli macierz A wymiaru $n \times n$ ma skończony rząd, to jej wyznacznik jest pierwiastkiem pewnego stopnia z jedynki w ciele, nad którym jest zdefiniowana. W szczególności jeśli $A \in M_n(\mathbb{Z})$, to $\det A = \pm 1$, więc A jest odwracalna — leży w $GL(n, \mathbb{Z})$.

Lemat 3.4. *Jeśli $A \in GL(n, \mathbb{Z})$ ma skończony rząd, to jest diagonalizowalna nad \mathbb{C} .*

Dowód. Chcemy wykazać, że po przejściu do postaci Jordana dla A wszystkie klatki będą miały wymiar 1. Jeśli macierz B jest klatką Jordana odpowiadającą wartości własnej $\alpha \neq 0$, to w B^n nad przekątną pojawiają się wartości $n\alpha^{n-1}$. Można to łatwo udowodnić indukcyjnie. Wobec tego klatka wymiaru większego od 1 ma skończony rząd tylko jeśli odpowiada wartości własnej 0. Ale macierz skończonego rzędu ma wszystkie wartości własne niezerowe, ponieważ jej wyznacznik jest pierwiastkiem z 1.

□

Można opisać dokładnie, do jakich zespolonych macierzy diagonalnych mogą być podobne macierze skończonego rzędu o współrzędnych całkowitych — pewne informacje na ten temat znajdują się w pracy [KP02]. Nie zajmujemy się tym dalej, ponieważ nie jest to istotne dla wyników pracy.

Z postaci wielomianu charakterystycznego macierzy o współczynnikach całkowitych skończonego rzędu można wyciągnąć pewne wnioski dotyczące wymiaru zbioru punktów stałych działania na rozmaitości abelowej.

Lemat 3.5. *Jeśli $A \in GL(n, \mathbb{Z})$, n jest nieparzyste i A ma skończony rząd, to A ma wartość własną równą ± 1 . Jeśli $A \in SL(n, \mathbb{Z})$, to 1 musi być wartością własną A .*

Dowód. Wielomian charakterystyczny A ma współczynniki całkowite, więc w szczególności rzeczywiste. Ponieważ jest nieparzystego stopnia, to ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty α . Jako wartość własna A , α jest pierwiastkiem z 1, więc $\alpha = \pm 1$.

Co więcej, każdej z pozostałych wartości własnych A odpowiada sprzężona do niej wartość własna. Ta odpowiedniość przenosi się również na wektory bazy Jordana — klatkom dla wartości β odpowiada identyczny układ klatek dla $\bar{\beta}$, ze względu na symetrię równań na wektory własne dla sprzężonych wartości. Wobec tego iloczyn wszystkich wartości własnych oprócz α jest dodatni. W przypadku $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ iloczyn wszystkich wartości własnych jest równy $\det A = 1$, więc również $\alpha > 0$, czyli $\alpha = 1$.

Można dodać, że jeśli $A \notin SL(n, \mathbb{Z})$, to na mocy analogicznego rozumowania ma wartość własną $\alpha = -1$.

□

Wniosek 3.6. *Skończone podgrupy cykliczne w $SL(3, \mathbb{Z})$ mają przynajmniej jednowymiarową trywialną podreprezentację, więc, uwzględniając przyjęte w punkcie 1.3 założenia, nie będziemy przeprowadzać dla nich konstrukcji Kummera.*

Wniosek 3.7. *Jeśli $A \in SL(3, \mathbb{Z})$ jest skończonego rzędu oraz $A \neq I$, to punkty stałe działania A na \mathbb{C}^3 tworzą zbiór wymiaru 1.*

3.2. Klasyfikacja skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$

Celem tej części pracy jest wyjaśnienie, w jaki sposób została przeprowadzona klasyfikacja skończonych niecyklicznych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$ z dokładnością do sprzężenia w $GL(3, \mathbb{Z})$.

Klasyfikację z dokładnością do izomorfizmu można znaleźć w [Ne72], IX.14.

Lemat 3.8. *Nietrywialne skończone podgrupy $SL(3, \mathbb{Z})$ z dokładnością do izomorfizmu to*

- grupy cykliczne $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$,
- grupy dihedralne D_4, D_6, D_8, D_{12} ,
- grupa A_4 permutacji parzystych zbioru czteroelementowego (inaczej: grupa T izometrii czworościanu),
- grupa S_4 wszystkich permutacji zbioru czteroelementowego (inaczej: grupa O izometrii sześciianu).

Przypomnijmy, że grupa D_4 jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, a D_6 z S_3 — grupą permutacji zbioru trzejelementowego.

Każdą klasę izomorfizmu podgrup skończonych chcemy podzielić względem relacji sprzężoności w $GL(3, \mathbb{Z})$. Algorytm zastosowany do tej klasyfikacji opiera się na dwóch krokach:

1. znalezieniu reprezentantów klas sprzężoności maksymalnych podgrup skończonych w grupie $GL(3, \mathbb{Z})$,
2. wyznaczeniu klas sprzężoności dowolnych podgrup skończonych poprzez analizę maksymalnych,

oraz poniższym spostrzeżeniu:

Lemat 3.9. *Niech G będzie dowolną skończoną podgrupą w $SL(3, \mathbb{Z})$, a $\{H_i\}_{i \in I}$ rodziną reprezentantów wszystkich klas sprzężoności maksymalnych podgrup skończonych w $GL(3, \mathbb{Z})$. Wówczas G jest sprzężona w $GL(3, \mathbb{Z})$ z podgrupą G' zawartą w $H_i \cap SL(3, \mathbb{Z})$ dla pewnego $i \in I$.*

Dowód. Z twierdzenia Minkowskiego (tw. 3.1) wynika, że rząd skończonej podgrupy $GL(3, \mathbb{Z})$ jest mniejszy niż rząd grupy $GL(3, \mathbb{Z}_3)$. Wobec tego w $GL(3, \mathbb{Z})$ istnieją maksymalne podgrupy skończone. Ponadto każda skończona podgrupa $GL(n, \mathbb{Z})$ zawiera się w pewnej maksymalnej podgrupie skończonej.

Teraz wystarczy wziąć maksymalną skończoną podgrupę $H < GL(3, \mathbb{Z})$ zawierającą G i zauważyć, że H jest sprzężone z pewnym H_i . Ponieważ sprzężenie nie zmienia wyznacznika macierzy, to przekształca G na podgrupę przecięcia $H_i \cap SL(3, \mathbb{Z})$. □

Wobec tego wystarczy znaleźć reprezentanty klas sprzężoności maksymalnych skończonych podgrup $GL(3, \mathbb{Z})$, przeciąć je z $SL(3, \mathbb{Z})$ i sklasyfikować podgrupy tych przecięć z dokładnością do sprzężoności w $GL(3, \mathbb{Z})$. Odrzucamy podgrupy cykliczne, ponieważ nie są interesujące ze względu na dalsze zastosowania wyników.

3.2.1. Maksymalne skończone podgrupy $GL(3, \mathbb{Z})$

Do wyliczenia klas sprzężoności nad \mathbb{Z} maksymalnych podgrup $GL(3, \mathbb{Z})$ został wykorzystany pakiet CARAT, przeznaczony przede wszystkim do obliczeń krystalograficznych. Maksymalne skończone podgrupy $GL(n, \mathbb{Z})$ należą do klasy grup Bravais, używanych w krystalografii. To wynika natychmiast z definicji i podstawowych własności grup Bravais, podanych w [OPS98]. Programy pakietu CARAT potrafią podać grupy Bravais (do wymiaru 6), trzeba tylko wybrać spośród nich maksymalne podgrupy skończone.

Uwaga 3.2.1. *Każda maksymalna skończona podgrupa $GL(n, \mathbb{Z})$ zawiera element $-I$, ponieważ to jest element centrum $GL(n, \mathbb{Z})$.*

Program *Bravais.inclusions* (z opcją -S) pakietu CARAT podał wszystkie grupy Bravais w $GL(3, \mathbb{Z})$ zawierające podgrupę $\{I, -I\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Z uwagi 3.2.1 wynika, że w tym zbiorze znalazły się wszystkie maksymalne skończone podgrupy $GL(3, \mathbb{Z})$. Ta sama funkcja pozwoliła wyeliminować grupy zawarte w którejś z pozostałych grup tego zbioru, czyli na pewno nie będące maksymalnymi skończonymi podgrupami $GL(3, \mathbb{Z})$. Pozostały cztery grupy, trzy rzędu 48 i jedna rzędu 24. Z dalszych obliczeń wynika, że to są maksymalne podgrupy skończone w $GL(3, \mathbb{Z})$. Dowód tego faktu praktycznie nie jest do niczego potrzebny — wystarczy, że jest ich niedużo i że umiemy sklasyfikować ich podgrupy.

3.2.2. Wszystkie skończone niecykliczne podgrupy $SL(3, \mathbb{Z})$

Do wybrania klas sprzężoności skończonych niecyklicznych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$ z czterech maksymalnych podgrup skończonych użyto pakietu GAP. Przecięcie każdej z czterech otrzymanych podgrup z $SL(3, \mathbb{Z})$ jest indeksu 2, więc dane wejściowe składają się z trzech podgrup rzędu 24 i jednej rzędu 12 — w tabeli w punkcie 3.2.3 są to grupy $S_4(1)$, $S_4(2)$, $S_4(3)$ oraz D_{12} .

Zastosowany osobno dla każdej z czterech podgrup algorytm polega na podziale elementów na kilka list względem ich rzędu w grupie i utworzeniu list podgrup danego typu poprzez sprawdzanie relacji na generatorach. Można to zrobić efektywnie, ponieważ wszystkie skończone podgrupy $SL(3, \mathbb{Z})$, podane w treści lematu 3.8, oprócz grup cyklicznych, mają prezentację o dwóch generatorach i jednej relacji. Powtarzające się podgrupy (identyczne lub sprzężone w danej podgrupie maksymalnej z jakąś wcześniej utworzoną) były usuwane na bieżąco, żeby przyspieszyć obliczenia. W wyniku otrzymano trochę ponad dwadzieścia podgrup, co udało się poprawić do dokładnie dwudziestu poprzez zastosowanie różnych heurystyk.

Zbadanie działania otrzymanych reprezentacji grup na produkcie trzech krzywych eliptycznych nasunęło przypuszczenie, że cztery z dwudziestu grup są zbędne. Faktycznie, udało się znaleźć macierze sprzęgające je z innymi spośród pozostałych szesnastu. Pozostałe definiują różne działania na produkcie trzech krzywych eliptycznych. Okazuje się jednak, że same wielomiany Poincaré nie wystarczą do ich rozróżnienia. Szczególnie ciekawe pod tym względem przypadki to 6.1.3 i 6.1.4, skomentowane w punkcie 6.1.4.

3.2.3. Podsumowanie wyników

Tabela podsumowuje wyniki klasyfikacji. Podajemy generatory reprezentantów wszystkich klas sprzężoności skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$. Oznaczenia grup w tabeli będą również używane do oznaczania klas sprzężoności reprezentowanych przez te grupy.

grupa	generatory
$D_4(1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$D_4(2)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$D_4(3)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$D_4(4)$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$D_6(1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$D_6(2)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$D_6(3)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$D_8(1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$D_8(2)$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
D_{12}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A_4(1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$A_4(2)$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$A_4(3)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$S_4(1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$S_4(2)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$S_4(3)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dla otrzymanych wyników uogólnionej konstrukcji Kummera w przypadku trójwymiarowym istotna jest następująca definicja:

Definicja 3.2.1. Powiemy, że skończone podgrupy $G, G' < GL(n, \mathbb{Z})$ są dualne, jeśli macierze w G' są otrzymywane przez transpozycje macierzy w G . Klasy sprzężoności podgrup $GL(n, \mathbb{Z})$ są dualne, jeśli można wybrać dualne reprezentanty.

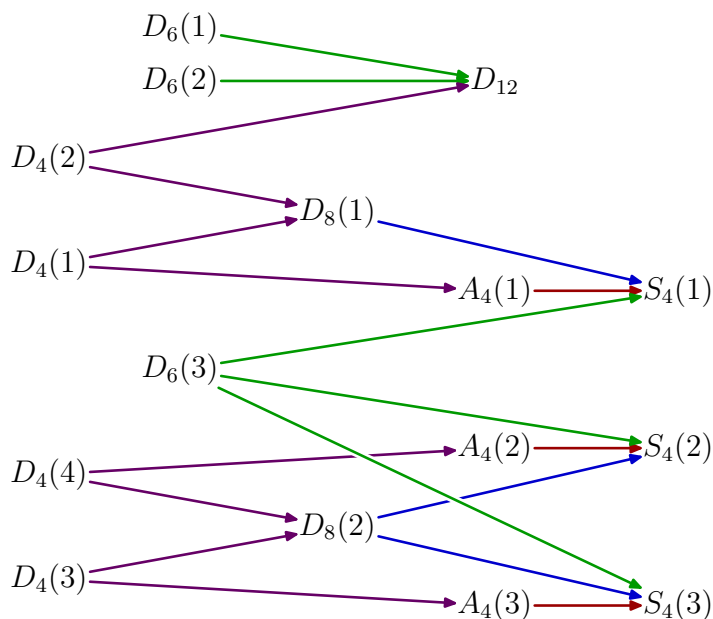
Pomijamy sprawdzenie poprawności drugiej części powyższej definicji, ponieważ jest łatwe.

Uwaga 3.2.2. Mamy następujące relacje (otrzymane przez obliczenia wykonane za pomocą programu GAP):

- każda z następujących klas sprzężoności grup jest dualna do siebie samej: $D_4(1)$, $D_4(2)$, $D_6(3)$, $D_8(1)$, $D_8(2)$, D_{12} , $A_4(1)$, $S_4(1)$;
- następujące pary klas sprzężoności grup są dualne: $D_4(3)$ i $D_4(4)$, $D_6(1)$ i $D_6(2)$, $A_4(2)$ i $A_4(3)$, $S_4(2)$ i $S_4(3)$.

Na mocy lematu 1.3, jeśli w klasie sprzężoności grupy H istnieje podgrupa grupy G , to istnieje wymierne odwzorowanie z rozmierności Kummera dla H w rozmierność Kummera dla G . Znajomość odwzorowań między rozmiernościami Kummera może być przydatna w dalszych badaniach konstrukcji. Wobec tego podajemy relacje pomiędzy klasami sprzężoności grup, dla których przeprowadzamy konstrukcję.

Uwaga 3.2.3. Poniższy diagram przedstawia relacje pomiędzy klasami sprzężoności skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$. Strzałka od grupy H do grupy G oznacza, że istnieje H' sprzężona z H , będąca podgrupą G . Żeby rysunek był czytelny, nie rysujemy strzałek, które pochodzą od złożeń narysowanych strzałek.



Rozdział 4

Konstrukcja rozmaitości trójwymiarowych

Ten rozdział stanowi wprowadzenie do obliczeń dla konstrukcji Kummera zastosowanej do produktu trzech krzywych eliptycznych. W poprzednim rozdziale omówiona została klasyfikacja skończonych niecyklicznych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$ z dokładnością do sprzężenia w $GL(3, \mathbb{Z})$. Teraz chcemy z każdej klasy sprzężoności wybrać jedną grupę i przeanalizować jej działanie na produkcie trzech krzywych eliptycznych. Zaprezentowane tu stwierdzenia odnoszą się do sytuacji trójwymiarowej. Stanowią one szczególnie przypadek twierdzeń udowodnionych w pracy [AW08].

W tej części pracy G jest skończoną podgrupą $SL(3, \mathbb{Z})$. Niech H będzie podgrupą G . Przez $N(H)$ oznaczamy normalizator H w G , natomiast $W(H) = N(H)/H$ to grupa Weyla podgrupy H . Jeśli podgrupa H jest cykliczna, czyli $H = \langle h \rangle$, przyjmujemy oznaczenia $N(h) := N(\langle h \rangle)$ i $W(h) := W(\langle h \rangle)$.

Przyjrzyjmy się, jakie dane o strukturze działania grupy G na A^3 są potrzebne do policzenia kohomologii rozmaitości Kummera.

4.1. Kohomologie otrzymywanych rozmaitości

Żeby wyliczyć kohomologie trójwymiarowych rozmaitości Kummera, będziemy postępować analogicznie jak w przypadku dwuwymiarowym. Znalezienie wielomianu Poincaré ilorazu $Y = A^3/G$ wykorzystuje podstawy teorii reprezentacji i nie jest trudne. Obliczenia zostały wykonane za pomocą prostej funkcji w programie GAP, opartej na wzorach z rozdziału 2. w [FH91], jak dla przypadku dwuwymiarowego (zob. 2.3). Główny problem to zbadanie wpływu rozwiązań osobliwości na wartości liczb Bettięgo.

Żeby zastosować twierdzenie 2.2, musimy wybrać odpowiednią stratyfikację rozmaitości Y i X . W rozmaitości Y możemy wyróżnić stratum wymiaru 0 — zbiór punktów o niecyklicznej grupie izotropii, stratum wymiaru 1 — krzywe punktów o cyklicznych grupach izotropii bez punktów o większych stabilizatorach, oraz stratum wymiaru 3 — gładką część Y . Biorąc przeciwobrazy stratów przy rozwiązaniu osobliwości otrzymamy stratyfikację rozmaitości X . Strata będą miały wymiary odpowiednio 1, 2 i 3. Trójwymiarowe stratum będzie takie samo jak dla Y .

Policzymy wirtualny wielomian Poincaré trójwymiarowego stratum, odejmując od wielomia-

nu Y wielomiany niższych stratów. W tym celu musimy wyznaczyć liczby krzywych punktów osobliwych i ich punkty przecięcia oraz działanie grup Weyla na punktach osobliwych. Następnie do otrzymanego wyniku dodamy wielomiany rozwiązań osobliwości. To wymaga jeszcze dokładniejszej analizy działania grup na A^3 — konieczna jest znajomość działania grup Weyla również na wiązkach tworzących rozwiązania osobliwości nad krzywymi osobliwymi.

4.2. Struktura zbioru punktów osobliwych

Na początek zobaczmy, jak wyglądają zbiory punktów stałych działania podgrup G w A^3 przed przejściem do ilorazu. Ogólnie, punkty stałe działania cyklicznych podgrup G będą układać się na krzywych, natomiast zbiór punktów stałych podgrup niecyklicznych jest dyskretny.

Zbiór punktów stałych wybranej podgrupy cyklicznej składa się z rozłącznych krzywych eliptycznych. Dowód tego faktu łatwo wynika z lematu 3.7. Dla wybranej podgrupy $H < G$ krzywe jej punktów stałych będziemy nazywać krzywymi wyznaczonymi przez podgrupę H . Krzywe wyznaczone przez podgrupę cykliczną H mogą zawierać, i często zawierają, punkty o wyższych (niecyklicznych) grupach izotropii. Są to punkty przecięcia dwóch lub więcej krzywych wyznaczonych przez różne podgrupy cykliczne.

Jeśli podgrupy H i H' są sprzężone, to zbiory punktów stałych działania tych podgrup są utożsamiane w ilorazie A^3/G . Wobec tego, żeby znaleźć liczbę składowych zbioru punktów osobliwych w Y , wystarczy z każdej klasy sprzężoności wybrać jedną podgrupę cykliczną i policzyć wyznaczone przez nią krzywe.

Na zbiorze punktów stałych podgrupy cyklicznej H działa grupa Weyla $W(H)$. To działanie może utożsamiać pewne krzywe wyznaczone przez H . Często działanie pewnej podgrupy $W(H)$ można obciąć do poszczególnych krzywych. Wybierzmy nierozkładalną składową K zbioru punktów osobliwych w Y , zawierającą wyłącznie obrazy punktów o grupie izotropii H . Krzywa K jest obrazem krzywej wyznaczonej przez podgrupę H , z której wyrzucamy punkty o wyższych grupach izotropii (lub kilku takich krzywych). Przez A_K oznaczmy wybraną krzywą eliptyczną w A^3 , której obrazem jest domknięcie \bar{K} . Niech W_K będzie podgrupą $W(H)$, która zachowuje A_K . Wówczas znormalizowane domknięcie K , oznaczane przez \widehat{K} , jest izomorficzne z ilorazem A_K/W_K (zob. [AW08]). To stwierdzenie nie byłoby prawdziwe, gdybyśmy na przykład patrzyli na domknięcie K bez normalizacji. Punkty o niecyklicznej grupie izotropii leżące na A_K mogą zostać utożsamione przez działanie G w taki sposób, że domknięcie krzywej K będzie równe ilorazowi A_K/W_K ze sklejonymi dwoma punktami. Inaczej, krzywa A_K/W_K będzie dwukrotnie przechodziła przez pewien punkt Y . Taka sytuacja występuje w przypadku grupy D_{12} , opisanym dokładnie w punkcie 5.1.

W niektórych przypadkach na krzywej eliptycznej A_K leżą punkty o niecyklicznej grupie izotropii, które są sklejane w ilorazie, ale to utożsamienie pochodzi od działania grupy W_K . Wówczas otoczenia tych punktów na krzywej A_K również są sklejane w ilorazie, czyli w tej sytuacji krzywa A_K/W_K nie będzie przechodziła przez punkt ilorazu dwukrotnie — jest to inna sytuacja niż poprzednio. Normalizacja krzywej K nie będzie izomorfizmem, ponieważ punkty o niecyklicznej grupie izotropii nie są normalne na krzywej, ale będzie homeomorfizmem. Takie krzywe pojawiają się w przypadku jednej z grup D_8 , w punkcie 5.2.2.

4.3. Kohomologie rozwiązań nad krzywymi

Niech K będzie składową zbioru punktów osobliwych w Y , będącą obrazem krzywej eliptycznej $A_K \subset A^3$ wyznaczonej przez podgrupę cykliczną H (z której wyrzucamy punkty o niecyklicznej grupie izotropii). Chcemy zrozumieć, jak wyglądają rozwiązania osobliwości na krzywej K .

Rozważamy lokalnie produktowe rozwiązania osobliwości nad krzywymi. Ponieważ działanie H na \mathbb{C}^3 rozkłada się na sumę prostą trywialnego działania na przestrzeni jednowymiarowej oraz działania na przestrzeni dwuwymiarowej, możemy skonstruować rozwiązanie produktowe nad $A_K \subset A^3$, którego włóknem będzie przeciwobraz punktu osobliwego w pewnym rozwiązaniu osobliwości \mathbb{C}^2/H . Rozwiązanie nad krzywą K konstruujemy biorąc iloraz rozwiązania produktowego (o ustalonym włóknem F) nad krzywą eliptyczną A_K przez działanie grupy Weyla podgrupy H na tej krzywej (zob. [AW08]).

Niech F będzie przeciwobrazem punktu osobliwego przy minimalnym rozwiązaniu dwuwymiarowej osobliwości ilorazowej \mathbb{C}^2/H . Ponieważ wybrane rozwiązanie osobliwości dwuwymiarowej jest krepantne, to lokalnie produktowe rozwiązanie o włóknem F również będzie krepantne. Żeby policzyć wkład rozwiązania osobliwości nad krzywą K w kohomologie X , musimy znaleźć kohomologie ilorazu wiązki $A_K \times F$ przez działanie W_K . W tym celu wprowadzimy notację wielomianów Poincaré o współczynnikach w reprezentacjach.

Przyjrzyjmy się działaniu W_K na kohomologiach $A_K \times F$. Kohomologie produktu to iloczyn tensorowy kohomologii czynników: $H^n(A_K \times F) = \bigoplus_{i=0}^n H^i(A_K) \otimes H^{n-i}(F)$ (formuła Künnetha). Izomorfizm pochodzi od rzutowań produktu na czynniki, więc działanie W_K na $H^n(A_K \times F)$ jest zadane przez iloczyn tensorowy obcięć działania W_K na otoczeniu A_k do A_K i F . Działanie na $H^*(A_K)$ pochodzi od obcięcia reprezentacji W_K , więc je znamy. Zbadanie działania na $H^*(F)$ wydaje się trudniejsze. Okazuje się jednak, że zrozumienie indukowanego działania na kohomologiach włóknach rozwiązania produktowego nie jest problemem, ponieważ w rozpatrywanych przypadkach zachodzi odpowiedniość McKaya (zob. np. [Re02]). W szczególności działanie $W(H)$ na kohomologiach włókna F jest takie, jak działanie $W(H)$ na klasach sprzężoności w grupie H .

Zobaczmy, jak wyglądają wielomiany Poincaré badanych rozmaitości. Niech ν_K oznacza rozpatrywaną reprezentację W_K na przestrzeni kohomologii krzywej A_K , natomiast η_K — znaną dzięki odpowiedniości McKaya reprezentację W_K w kohomologiach włókna F . Przyjmijmy, że $\nu_K = \bigoplus_i \nu_K^i$ jest rozkładem reprezentacji ν_K na sumę prostą podreprezentacji odpowiadających poszczególnym przestrzeniom kohomologii krzywej A_K . Analogicznie mamy rozkład $\eta_K = \bigoplus_i \eta_K^i$. Ponadto przez $\mu_0(\rho)$ oznaczamy operację przypisania reprezentacji ρ wymiaru jej maksymalnej trywialnej podreprezentacji (czyli podprzestrzeni punktów stałych działania). Przy tych oznaczeniach wielomian Poincaré ilorazu A_K/W_K będzie równy

$$\mu_0\left(\bigoplus_i \nu_K^i t^i\right) = \bigoplus_i \mu_0(\nu_K^i) t^i,$$

natomiast wielomian Poincaré ilorazu wiązki $A_K \times F$ przez działanie W_K to

$$\mu_0\left(\left(\bigoplus_i \nu_K^i t^i\right) \otimes \left(\bigoplus_i \eta_K^i t^i\right)\right) = \sum_m \left(\sum_{i=0}^m \mu_0(\nu_K^i \otimes \eta_K^{m-i})\right) t^m.$$

W obliczeniach trzeba uwzględnić zawarte w krzywej A_K punkty o wyższych grupach izotropii oraz działanie W_K na tych punktach. Zostanie to dokładnie wyjaśnione w następnym rozdziale, opisującym przykładowe obliczenia.

4.4. Zastosowanie odpowiedniości McKaya

Do policzenia kohomologii rozwiązań osobliwości podgrup cyklicznych brakuje nam jedynie informacji, jak mogą wyglądać reprezentacje W_K w kohomologiach włókna wiązki F . Okazuje się, że jest bardzo niewiele możliwości — opisujemy tutaj wszystkie, żeby w dalszym ciągu pracy odwoływać się do tego punktu.

W rozpatrywanej sytuacji F jest dywizorem wyjątkowym rozwiązania dwuwymiarowej osobliwości ilorazowej \mathbb{C}^2/H . Grupa H to jedna z grup $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$, więc osobliwości są typu A_1, A_2, A_3 lub A_5 . Dla osobliwości typu A_n dywizor wyjątkowy F jest łańcuchem \mathbb{P}^1 , złożonym z n krzywych. Wobec tego niezerowe kohomologie F to $H^0(F) = 1$ i $H^2(F) = \mathbb{C}^n$.

Możemy utożsamić elementy bazy $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ przestrzeni $H^2(F)$ z klasami sprzężoności nietrywialnych elementów w grupie H . Z odpowiedniości McKaya (zob. [Re02]) wynika, że wówczas działanie W_K na $H^2(F)$ w bazie $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest identyczne z działaniem W_K na klasach sprzężoności w H . Ponieważ H jest przemienna, to klasy sprzężoności są jednoelementowe, czyli w rzeczywistości rozpatrujemy działanie W_K na H przez sprzężenie.

Wśród rozpatrywanych grup zachodzą następujące trzy przypadki:

4.4.1. $W_K = 0$

Wtedy oczywiście działanie na kohomologiach jest trywialne.

4.4.2. $W_K = \mathbb{Z}_2$

Jeśli $H = \mathbb{Z}_2$, to działanie W_K na kohomologiach F musi być trywialne.

Okazuje się, że w pozostałych przypadkach grupa generowana przez H i generator W_K jest nieprzemienne. Wobec tego dowolny generator H jest przekształcany na inny generator tej podgrupy. Grupa H jest jedną z grup cyklicznych $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$ — każda z nich ma dokładnie dwa generatory, więc są one zamieniane przez działanie W_K . Dla \mathbb{Z}_4 element rzędu 2 oczywiście jest przekształcany na siebie. Dla \mathbb{Z}_6 elementy rzędu 3 są zamieniane, natomiast element rzędu 2 jest punktem stałym działania W_K .

Niech $\{\alpha, \beta\}$ będzie bazą przestrzeni liniowej, na której \mathbb{Z}_2 działa zamieniając wektory bazowe. Po przejściu do bazy $\{\alpha + \beta, \alpha - \beta\}$ działanie zapisuje się jako $1 \oplus \varepsilon$, czyli suma prosta jednowymiarowych reprezentacji \mathbb{Z}_2 : trywialnej oraz standardowej ($\varepsilon = -1$). Dalej będziemy to zapisywać jako $1 + \varepsilon$, w ogólnym przypadku grupując składniki odpowiadające tej samej reprezentacji. Korzystając z tej obserwacji możemy zapisać działanie \mathbb{Z}_2 na przestrzeni kohomologii $H^2(F)$ następująco:

grupa	reprezentacja	podprzestrzeń stała
\mathbb{Z}_2	1	1
\mathbb{Z}_3	$1 + \varepsilon$	1
\mathbb{Z}_4	$2 + \varepsilon$	2
\mathbb{Z}_6	$3 + 2\varepsilon$	3

Ostatnia kolumna tabeli zawiera wymiar podprzestrzeni niezmienniczej działania danej reprezentacji \mathbb{Z}_2 na przestrzeni $H^2(F)$.

4.4.3. $W_K = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Grupa $W_K = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ pojawia wyłącznie się dla $H = \mathbb{Z}_2$, a wtedy działanie na kohomologiach F jest trywialne.

4.5. Punkty o niecyklicznej grupie izotropii

Jeśli $H' < G$ jest podgrupą sprzężoną do H , to działanie G przeprowadza punkty stałe działania H' na punkty stałe działania H . Wobec tego przy liczeniu punktów o niecyklicznej grupie izotropii w ilorazie A^3/G teoretycznie można się ograniczyć do wyboru jednej podgrupy z każdej klasy sprzężoności. Nie jest to jednak najwygodniejsza metoda. Policzenie kohomologii jednowymiarowego stratum wymaga wyznaczenia liczby punktów o większej grupie izotropii na każdej krzywej w A^3 wyznaczonej przez podgrupę cykliczną oraz zrozumienia działania G na zbiorze tych punktów. W tej sytuacji ograniczenie badania punktów o niecyklicznej grupie izotropii do reprezentantów klas sprzężoności powoduje, że bardzo łatwo można pominąć niektóre punkty na krzywych. Inny pomysł to rozważanie przecięć wszystkich krzywych wyznaczonych przez podgrupy cykliczne, co jednak nie jest zbyt efektywne dla dużych grup G . Najlepszą metodą okazało się badanie punktów stałych wszystkich podgrup niecyklicznych, nie tylko reprezentantów klas sprzężoności.

Jeśli $H < G$ jest właściwą podgrupą niecykliczną, to na zbiorze punktów o grupie izotropii równej H działa normalizator $N(H)$, więc może być tak, że niektóre punkty przechodzą na ten sam punkt w ilorazie.

Istnienie rozwiązań osobliwości w punktach o niecyklicznej grupie izotropii nie jest oczywiste. Konstruuje się je, stopniowo rozwiązując osobliwości pochodzące od działania kolejnych podgrup normalnych. Jak wynika z pracy [AW08], w przypadku trójwymiarowym można spełnić wszystkie warunki wymagane do przeprowadzenia takiej konstrukcji. W ten sposób można uzyskać krepantne rozwiązania osobliwości.

Chcemy znać kohomologie dywizorów wyjątkowych dla rozwiązań osobliwości ilorazowych pochodzących od niecyklicznych skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$. Jak poprzednio, skorzystamy z odpowiedniości McKaya (zob. [BM94]) — liczba krzywych \mathbb{P}^1 w rozwiązaniu osobliwości ilorazowej dla grupy H jest równa liczbie klas sprzężoności elementów w tej grupie. Liczbę klas sprzężoności w skończonej grupie można policzyć za pomocą prostej funkcji w programie GAP. Wielomiany Poincaré są następujące:

grupa	wielomian
D_4	$1 + 3t^2$
D_6	$1 + 2t^2$
D_8	$1 + 4t^2$
D_{12}	$1 + 5t^2$
A_4	$1 + 3t^2$
S_4	$1 + 4t^2$

Korzystając z tych informacji możemy policzyć kohomologie wszystkich trójwymiarowych rozmaitości Kummera.

Rozdział 5

Przykłady

Obliczenia dla wszystkich szesnastu rozpatrywanych grup opierają się na tych samych metodach. Wobec tego dokładnie opisujemy tylko pewne przykłady, ilustrujące charakterystyczne dla trójwymiarowej konstrukcji Kummera zjawiska. Wyniki dla pozostałych grup zostaną podane bardziej skrótowo w następnym rozdziale.

W trzech przypadkach przedstawiamy szczegóły obliczeń wykonanych w celu policzenia kohomologii oraz strukturę otrzymywanych w uogólnionej konstrukcji Kummera rozmaitości. Na początek analizujemy dokładnie przypadek grupy D_{12} . Dalej porównujemy wyniki konstrukcji dla dwóch niesprzężonych reprezentacji grupy D_8 .

Format opisu rozwiązań

Dane dotyczące krzywych osobliwych w ilorazie A^3/G są podsumowane w tabelach. Kolejne kolumny tabeli podają następujące informacje:

- **grupa** — typ podgrupy, której działanie badamy; w nawiasie podany jest typ osobliwości ilorazowej odpowiadającej tej podgrupie;
- **generator** — macierz generująca badaną podgrupę (wybór podgrupy z klasy sprzężoności, jak również wybór generatora, często nie jest jednoznaczny);
- **równania** — równania we współrzędnych e_1, e_2, e_3 w A^3 , opisujące zbiór punktów stałych działania badanej podgrupy;
- **składowe** — liczba spójnych składowych (krzywych eliptycznych w A^3) zbioru punktów stałych działania badanej podgrupy;
- $W(g)$ — grupa Weyla badanej podgrupy;
- **iloraz** — krzywe, z którymi izomorficzne są ilorazy składowych zbioru punktów stałych danej grupy przez działanie grupy Weyla (czasami pojawiają się różne klasy izomorfizmu) oraz liczba odpowiednich krzywych w ilorazie;
- W_K — podgrupa grupy Weyla działająca na danej krzywej (osobno dla wszystkich rodzajów krzywych w poprzedniej kolumnie, w odpowiadających im wierszach).

Taki sposób opisu rozwiązań będzie używany w tym oraz w następnym rozdziale.

5.1. Konstrukcja dla grupy D_{12}

Grupa G to reprezentacja D_{12} w $SL(3, \mathbb{Z})$. W $GL(3, \mathbb{Z})$ jest tylko jedna klasa sprzężoności podgrup izomorficznych z D_{12} . Podane generatory G są odpowiednio rzędu 2 i 6.

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\rangle$$

Przyjrzyjmy się obliczeniom prowadzącym do zrozumienia struktury konstruowanej rozmaitości. Zastosowane metody tworzą prawie ogólny algorytm — poszczególne przypadki różnią się tylko pewnymi szczegółami. Opisywane działanie grupy D_{12} jest jednym z najbardziej złożonych przypadków.

5.1.1. Punkty stałe podgrup cyklicznych

Na początku trzeba wyznaczyć zbiory punktów stałych dla reprezentantów klas sprzężoności podgrup cyklicznych D_{12} . W tej grupie są trzy klasy sprzężoności podgrup \mathbb{Z}_2 oraz po jednej klasie \mathbb{Z}_3 i \mathbb{Z}_6 . Następujące elementy grupy G będą potrzebne przy analizie konstrukcji:

$$g_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elementy g_1, g_2, g_3 i g_4 są rzędu 2, g_5 jest rzędu 3, a g_6 — rzędu 6. Zauważmy ponadto, że $g_3 = g_6^3$ oraz $g_5 = g_6^2$.

Zacznijmy od podgrupy \mathbb{Z}_2 generowanej przez g_1 . Punkty, na których ta podgrupa działa trywialnie, spełniają warunki $e_1 = -e_1$, $e_2 = e_2 - e_1$ i $e_3 = -e_3$. Z drugiej równości wynika, że $e_1 = 0$, trzecia jest równoważna $2e_3 = 0$. Wobec tego krzywe punktów stałych to zbiory zapisane we współrzędnych jako $\{(0, e_2, \alpha)\}$, gdzie e_2 jest parametrem przebiegającym krzywą eliptyczną, a α spełnia $2\alpha = 0$. Równanie $2\alpha = 0$ ma cztery rozwiązania na krzywej eliptycznej, więc dostajemy cztery rozłączne krzywe eliptyczne w A^3 .

Normalizator tej podgrupy \mathbb{Z}_2 jest generowany przez g_1 i g_3 ; generatorem $W(g_1)$ jest obraz g_3 , $W(g_1) = \mathbb{Z}_2$. Działanie $W(g_1)$ na punktach stałych $\langle g_1 \rangle$ jest następujące: $(0, e_2, \alpha) \mapsto (0, -e_2, \alpha)$. Wobec tego $W(g_1)$ działa na każdej krzywej punktów stałych przez inwolucję. Ilorazem krzywej eliptycznej przez działanie inwolucji jest \mathbb{P}^1 . Tutaj w ilorazie A^3/G niekoniernie dostaniemy \mathbb{P}^1 , ponieważ punkty o wyższej grupie izotropii mogą zostać posklejane. Natomiast jeśli wyrzucimy z krzywych punktów stałych dla dane podgrupy wszystkie punkty o wyższej grupie izotropii, to obraz w A^3/G będzie izomorficzny z ilorazem krzywej bez wyrzucanych punktów przez odpowiednie działanie.

Równania punktów stałych dla podgrupy $\langle g_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ to $e_1 = -e_1 + e_2$, $e_2 = e_2$ i $e_3 = -e_3$. Krzywe punktów stałych są opisane warunkami $2e_1 = e_2$ i $2e_3 = 0$, więc mamy cztery składowe parametryzowane e_1 , postaci $\{(e_1, 2e_1, \alpha)\}$, odpowiadające rozwiązaniom równania $2\alpha = 0$. Grupa Weyla $W(g_2)$ tak jak poprzednio jest generowana przez g_3 . Działa przez inwolucję na każdej krzywej: $(e_1, 2e_1, \alpha) \mapsto (-e_1, -2e_1, \alpha)$.

Trzecia podgrupa \mathbb{Z}_2 jest generowana przez g_3 , czyli trzecią potęgę generatora \mathbb{Z}_6 . Jest podgrupą normalną, a nawet centrum G . Wobec tego $N(g_3) = G$, a $W(g_3) \simeq D_6$ jest generowana przez g_1 i g_6 . Równania punktów stałych to $2e_1 = 0$ i $2e_2 = 0$, e_3 jest parametrem. Dostajemy 16 rozłącznych krzywych punktów stałych, odpowiadających parom rozwiązań równań na e_1 i e_2 : $\{(\alpha, \beta, e_3)\}$, $2\alpha = 0$, $2\beta = 0$.

Trzeba sprawdzić, jak $W(g_3)$ działa na zbiorze krzywych punktów stałych dla g_3 . W orbicie punktu (α, β, e_3) przy działaniu $W(g_3)$ znajdują się punkty $(\beta, \alpha + \beta, e_3)$, $(\alpha + \beta, \alpha, e_3)$, $(\alpha, \alpha + \beta, -e_3)$, $(\beta, \alpha, -e_3)$, $(\alpha + \beta, \beta, -e_3)$. Rozpatrzmy trzy przypadki:

1. $\alpha = \beta = 0$ — na krzywej $(0, 0, e_3)$ działanie $\langle g_6 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 < W(g_3)$ jest trywialne, w rzeczywistości mamy działanie $\mathbb{Z}_2 = W(g_3)/\mathbb{Z}_3$ przez inwolucję. Ponieważ generator \mathbb{Z}_6 działa trywialnie na punktach tej krzywej, to prawie wszystkie jej punkty będą miały grupę izotropii \mathbb{Z}_6 .
2. $\alpha = 0, \beta \neq 0$ — ten przypadek opisuje również zachowanie krzywych spełniających układy równań $\beta = 0, \alpha \neq 0$ oraz $\alpha = \beta \neq 0$. Element g_1 działa na krzywej $(0, \beta, e_3)$ przez inwolucję, natomiast g_6 przeprowadza tę krzywą na (β, β, e_3) , a następnie na $(\beta, 0, e_3)$. Stąd każda z krzywych spełniających podany warunek jest sklejana z innymi dwiema. Dla każdej z nich podgrupa grupy Weyla zachowująca tę krzywą $W_K \simeq \mathbb{Z}_2$ działa przez inwolucję. Wobec tego w ilorazie z 9 krzywych punktów stałych $\langle g_3 \rangle$ otrzymujemy 3 krzywe \mathbb{P}^1 punktów o grupie izotropii \mathbb{Z}_2 .
3. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq \beta$ — te warunki spełnia pozostałych 6 krzywych. Zauważmy, że wszystkie leżą w jednej orbicie działania $W(g_3)$, czyli działanie $W(g_3)$ na prawie wszystkich punktach krzywej jest wolne. Wobec tego dla każdej z nich $W_K = 0$. W ilorazie otrzymujemy jedną krzywą eliptyczną punktów o grupie izotropii \mathbb{Z}_2 .

Dla wszystkich krzywych \mathbb{P}^1 punktów o grupie izotropii \mathbb{Z}_2 włókno rozwiązania osobliwości jest izomorficzne z \mathbb{P}^1 , a wtedy działanie W_K musi być trywialne (co zostało wyjaśnione w 4.4). Załóżmy, że krzywa nie ma punktów o niecyklicznej grupie izotropii, na których W_K nie działa trywialnie. Dalej będziemy przyjmować to założenie przy liczeniu wielomianów Poincaré, jeśli nie zostanie powiedziane inaczej. Policzmy wirtualne wielomiany Poincaré dla tych krzywych przy założeniu, że wyrzucamy z krzywej n punktów o wyższych grupach izotropii. Korzystamy z notacji wprowadzonej w 4.3. Wielomian dla rozwiązania osobliwości nad jedną krzywą jest następujący:

$$\begin{aligned} \mu_0((1 - n + \varepsilon \cdot 2t + t^2)(1 + t^2)) &= \\ &= (1 - n + 2\mu_0(\varepsilon)t + t^2)(1 + t^2) = (1 - n + t^2)(1 + t^2) = (1 - n) + (2 - n)t^2 + t^4. \end{aligned}$$

Nie wszystkie krzywe punktów o grupie izotropii \mathbb{Z}_2 spełniają założenie, że W_K działa trywialnie na punktach stałych grup niecyklicznych krzywej. W tym przypadku, jeśli $W_K \simeq \mathbb{Z}_2$ zamienia punkty w parach i liczba par zamienianych punktów jest równa k , a n oznacza liczbę pozostałych punktów o wyższej grupie izotropii, to wielomian jest następujący:

$$\begin{aligned} \mu_0((1 - n - k - \varepsilon \cdot k + \varepsilon \cdot 2t + t^2)(1 + t^2)) &= \\ &= (1 - n - k - \mu_0(\varepsilon)k + 2\mu_0(\varepsilon)t + t^2)(1 + t^2) = (1 - n - k) + (2 - n - k)t^2 + t^4. \end{aligned}$$

W przypadku krzywej eliptycznej punktów stałych $\langle g_3 \rangle$ mamy $W_K = 0$, więc wirtualny wielomian Poincaré dla rozwiązania nad tą krzywą będzie iloczynem wielomianów dla krzywej i

dla włókna rozwiązania (z krzywej wyrzucamy n punktów):

$$(1 - n + 2t + t^2)(1 + t^2) = (1 - n) + 2t + (2 - n)t^2 + 2t^3 + t^4.$$

Podgrupa $\langle g_5 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ wyznacza następujące równania punktów stałych: $e_1 = e_2 - e_1$ i $e_2 = -e_1$. Stąd wynika, że $3e_1 = 0$ oraz $e_2 = -e_1 = 2e_1$. Mamy więc 9 krzywych punktów stałych, opisanych jako zbiory $\{(\gamma, 2\gamma, e_3)\}$ odpowiadające rozwiązaniom równania $3\gamma = 0$. Ponieważ $g_5 = g_6^2$, to podgrupa $\langle g_5 \rangle$ jest normalna w G . Wobec tego $W(g_5) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, jako generatory możemy wziąć g_2 i g_6 . Wówczas g_2 na każdej krzywej działa przez involucję. Natomiast g_6 przekształca $(\gamma, 2\gamma, e_3)$ na $(2\gamma, \gamma, e_3)$, czyli na krzywej dla $\gamma = 0$ działa trywialnie, a pozostałe 8 krzywych skleja parami. W ilorazie otrzymujemy więc 4 krzywe \mathbb{P}^1 , dla których $W_K \simeq \mathbb{Z}_2$, oraz krzywą \mathbb{P}^1 będącą ilorazem krzywej $\{(0, 0, e_3)\}$, która jest krzywą punktów stałych dla podgrupy \mathbb{Z}_6 .

Włókno F rozwiązania osobliwości ilorazowej \mathbb{Z}_3 składa się z dwóch \mathbb{P}^1 przecinających się transversalnie w jednym punkcie, W_K może działać nietrywialnie na kohomologiach włókna. Z odpowiedniości McKaya działanie generatora $W_K \simeq \mathbb{Z}_2$ na przestrzeni dwuwymiarowej $H^2(F)$ to zamiana wektorów bazowych, co jest równoważne reprezentacji $1 + \varepsilon$ (dokładny opis: 4.4.2). Wobec tego możemy wypisać wirtualny wielomian Poincaré dla rozwiązań nad każdą z czterech krzywych punktów o grupie izotropii \mathbb{Z}_3 , przy założeniu, że z krzywej wyrzucamy n punktów o wyższej grupie izotropii:

$$\begin{aligned} \mu_0((1 - n + \varepsilon \cdot 2t) + t^2)(1 + (1 + \varepsilon) \cdot t^2) &= 1 - n + 2\mu_0(\varepsilon)t + ((1 - n)\mu_0(1 + \varepsilon) + 1)t^2 + \\ &+ \mu_0(1 + \varepsilon)t^4 + 2\mu_0((\varepsilon \cdot (1 + \varepsilon))t^3) = (1 - n) + (2 - n)t^2 + 2t^3 + t^4, \end{aligned}$$

ponieważ $\mu_0(\varepsilon \cdot (1 + \varepsilon)) = \mu_0(\varepsilon + (\varepsilon \cdot \varepsilon)) = \mu_0(\varepsilon + 1) = 1$. (Dla tego i poniższego przypadku rozważanie sytuacji, kiedy W_K działa nietrywialnie na punktach o wyższej grupie izotropii, nie jest konieczne).

Przyjrzyjmy się wreszcie krzywym punktów o grupie izotropii $\langle g_6 \rangle \simeq \mathbb{Z}_6$. Jedna taka krzywa, $\{(0, 0, e_3)\}$ pojawiła się wcześniej jako krzywa punktów stałych dla działań $\langle g_3 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ oraz $\langle g_5 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$. Zauważmy, że punkty o grupie izotropii $\langle g_6 \rangle$ muszą być jednocześnie punktami stałymi $\langle g_3 \rangle$ i $\langle g_5 \rangle$, więc podana krzywa A_K jest jedyną krzywą punktów stałych $\langle g_6 \rangle$, co zresztą łatwo wynika z równań na współrzędne punktów stałych dla g_6 .

Podgrupa \mathbb{Z}_6 jest indeksu 2 w G , więc musi być normalna, a stąd $W(g_6) \simeq \mathbb{Z}_2$. Jako generator możemy wziąć dowolny element spoza $\langle g_6 \rangle$, na przykład g_1 . Działanie g_1 przeprowadza punkt $(0, 0, e_3)$ na $(0, 0, -e_3)$, czyli $W_K = W(g_6)$ działa na A_K przez involucję. Włókno rozwiązania osobliwości ilorazowej \mathbb{Z}_6 jest łańcuchem 5 krzywych \mathbb{P}^1 . Jak zostało opisane w 4.4.2, reprezentacja W_K w kohomologiach włókna to $3 + 2\varepsilon$. Wobec tego, po przekształceniach podobnych jak w przypadku podgrupy \mathbb{Z}_3 , otrzymujemy wirtualny wielomian Poincaré dla rozwiązania nad krzywą A_K bez n punktów o wyższych grupach izotropii:

$$\mu_0((1 - n + \varepsilon \cdot 2t + t^2)(1 + (3 + 2\varepsilon)t^2)) = (1 - n) + ((1 - n) \cdot 3 + 1)t^2 + 4t^3 + 3t^4.$$

Tabela podsumowuje wyniki dotyczące działania grupy G na rozmaitości A^3 .

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$e_1 = 0$ $2e_3 = 0$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = e_2$ $2e_3 = 0$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $2e_2 = 0$	16	D_6	$3 \times \mathbb{P}^1$ $1 \times A$	\mathbb{Z}_2 0
$\mathbb{Z}_3 (A_2)$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = e_2$ $3e_1 = 0$	9	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_6 (A_5)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$e_1 = 0$ $e_2 = 0$	1	\mathbb{Z}_2	$1 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

5.1.2. Punkty stałe podgrup niecyklicznych

Znamy już strukturę zbiorów punktów stałych dla podgrup cyklicznych. Do zakończenia obliczeń konieczne jest zrozumienie, jak krzywe punktów osobliwych się przecinają i jak wyglądają rozwiązania osobliwości w punktach przecięć. W tym celu opiszemy punkty stałe działania wszystkich niecyklicznych podgrup D_{12} . Nie ograniczymy się do wyboru reprezentantów z klas sprzężoności podgrup — dzięki temu łatwiej będzie zrozumieć, ile punktów o wyższych grupach izotropii leży na każdej krzywej osobliwej. Właściwe podgrupy niecykliczne D_{12} to trzy podgrupy D_4 , wszystkie sprzężone, oraz dwie normalne podgrupy D_6 .

Podgrupy izomorficzne z D_4 to $\langle g_1, g_3 \rangle$, $\langle g_2, g_3 \rangle$ oraz $\langle g_4, g_3 \rangle$. Wszystkie są sprzężone, więc dla każdej z podgrup izomorficznych z D_4 grupa Weyla jest trywialna, a działania G sklejają ze sobą rodziny punktów stałych dla wszystkich podgrup. Punkty stałe $\langle g_1, g_3 \rangle$ spełniają $e_1 = 0$, $2e_2 = 0$ i $2e_3 = 0$. Punkty stałe $\langle g_2, g_3 \rangle$ spełniają $e_2 = 0$, $2e_1 = 0$ i $2e_3 = 0$. Punkty stałe $\langle g_4, g_3 \rangle$ spełniają $e_1 = e_2$, $2e_1 = 0$ i $2e_3 = 0$. Wszystkie trzy rodziny składają się z 16 punktów. Przecięcie rodzin to cztery punkty o współrzędnych $(0, 0, \alpha)$, gdzie $2\alpha = 0$ — ich grupa izotropii to D_{12} . Z pozostałych punktów w ilorazie powstaje 12 punktów o grupie izotropii D_4 , w przeciwobrazie każdego są trzy punkty, po jednym z każdej rodziny.

Podgrupy izomorficzne z D_6 to $\langle g_1, g_5 \rangle$ i $\langle g_2, g_5 \rangle$. Punkty stałe $\langle g_1, g_5 \rangle$ spełniają równości $e_1 = 0$, $e_2 = 2e_1$ i $2e_3 = 0$. Normalizator tej podgrupy działa trywialnie na zbiorze punktów stałych, więc są to 4 punkty, które mają grupę izotropii D_{12} . Natomiast punkty stałe $\langle g_2, g_5 \rangle$ są opisane przez warunki $3e_1 = 0$, $2e_1 = e_2$ oraz $2e_3 = 0$. Punkty spełniające te równości mają współrzędne $(\beta, 2\beta, \gamma)$, gdzie $3\beta = 0$ oraz $2\gamma = 0$. Grupa Weyla $W(\langle g_2, g_5 \rangle) \simeq \mathbb{Z}_2$ jest generowana przez g_1 ; jej działanie przeprowadza punkt $(\beta, 2\beta, \gamma)$ na $(2\beta, \beta, \gamma)$. Wobec tego 4 punkty odpowiadające $\beta = 0$ mają grupę izotropii D_{12} , a pozostałe są sklejane parami do 16 punktów o grupie izotropii D_6 .

Punkty stałe działania całej grupy G to tylko 4 punkty znalezione wcześniej, o współrzędnych $(0, 0, \alpha)$, gdzie $2\alpha = 0$.

Pozostaje zobaczyć, ile punktów o niecyklicznej grupie izotropii leży na każdej krzywej odpowiadającej podgrupie cyklicznej. Z równań opisujących krzywe punktów osobliwych oraz

punkty o niecyklicznej grupie izotropii można odczytać następujące własności:

- na każdej krzywej punktów o grupie izotropii $\langle g_1 \rangle$ leżą 3 punkty o grupie izotropii D_4 i 1 o grupie izotropii D_{12} ;
- każda składowa zbioru punktów o grupie izotropii $\langle g_2 \rangle$ zawiera 3 punkty o grupie izotropii D_4 , 1 o grupie izotropii D_{12} oraz 8 punktów o grupie izotropii D_6 , które w ilorazie sklejają się do 4 punktów; to oznacza, że w ilorazie po wyjęciu punktów o niecyklicznej grupie izotropii, ta krzywa będzie izomorficzna z \mathbb{P}^1 bez 8 punktów, natomiast jej przeciwobraz w A^3 , nad którym konstruujemy rozwiązanie produktowe, to krzywa eliptyczna bez 12 punktów;
- krzywe \mathbb{P}^1 punktów o grupie izotropii $\langle g_3 \rangle$ zawierają po 4 punkty o grupie izotropii D_4 ;
- krzywa eliptyczna punktów o grupie izotropii $\langle g_3 \rangle$ nie zawiera punktów o większej grupie izotropii;
- na każdej z 4 krzywych \mathbb{P}^1 dla podgrupy $\langle g_5 \rangle$ leżą 4 punkty o grupie izotropii D_6 , które także w ilorazie są różne;
- krzywa punktów stałych \mathbb{Z}_6 zawiera wszystkie 4 punkty stałe działania D_{12} .

Struktura zbioru krzywych i punktów osobliwych jest niestety zbyt skomplikowana, żeby przedstawić ją na czytelnym diagramie. Można jednak łatwo uzyskać inne informacje o tej strukturze, na przykład zbadać, ile krzywych przecina się w poszczególnych punktach, ale nie będzie nam to potrzebne.

5.1.3. Wielomian Poincaré

Teraz można podsumować opisane powyżej wyniki i podać wirtualny wielomian Poincaré otrzymanej w konstrukcji rozmaitości.

Wirtualny wielomian Poincaré ilorazu A^3 przez działanie G jest równy

$$P_Y(t) = t^6 + 2t^4 + 6t^3 + 2t^2 + 1.$$

Wielomian dla najwyższego stratum powstaje poprzez odjęcie od wielomianu dla ilorazu wielomianów krzywych po wyrzuceniu punktów o wyższej grupie izotropii i wielomianów punktów o niecyklicznej grupie izotropii (czyli liczby tych punktów).

$$P_3(t) = P_Y(t) - 4(1 + t^2 - 4) - 4(1 + t^2 - 8) - 3(1 + t^2 - 4) - (1 + 2t + t^2) - 4(1 + t^2 - 4) - (1 + t^2 - 4) - 32 = t^6 + 2t^4 + 6t^3 - 15t^2 - 2t + 32.$$

Wielomian dla dwuwymiarowego stratum jest sumą wielomianów dla rozwiązań nad wszystkimi krzywymi z wyrzuconymi punktami o niecyklicznej grupie izotropii. Wielomiany te zostały wyliczone wcześniej, teraz wystarczy wstawić do nich liczbę wyrzucanych punktów i zsumować. Pierwszy składnik to wielomiany 4 krzywych dla podgrupy $\langle g_1 \rangle$ oraz 3 krzywych \mathbb{P}^1 dla $\langle g_3 \rangle$, dalsza część to wielomian 4 krzywych dla podgrupy $\langle g_2 \rangle$, które zawierają punkty o grupie izotropii D_6 , następnie dodajemy wielomian krzywej eliptycznej dla $\langle g_3 \rangle$ oraz wielomiany krzywych dla podgrup \mathbb{Z}_3 i \mathbb{Z}_6 .

$$\begin{aligned}
P_2(t) &= 7(1 - 4 + (2 - 4)t^2 + t^4) + 4(1 - 4 - 4 + (2 - 4 - 4)t^2 + t^4) + \\
&+ (1 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + t^4) + 4(1 - 4 + (2 - 4)t^2 + 2t^3 + t^4) + \\
&+ (1 - 4 + ((1 - 4) \cdot 3 + 1)t^2 + 4t^3 + 3t^4) = 19t^4 + 14t^3 - 52t^2 + 2t - 63.
\end{aligned}$$

Wielomian dla jednowymiarowego stratum to suma wielomianów rozwiązań nad punktami o niecyklicznej grupie izotropii — zostały one podane w 4.5.

$$P_1(t) = 12(1 + 3t^2) + 16(1 + 2t^2) + 4(1 + 5t^2) = 88t^2 + 32.$$

Wielomian otrzymanej rozmaitości X jest równy sumie wielomianów stratów:

$$P_X(t) = t^6 + 21t^4 + 20t^3 + 21t^2 + 1.$$

5.2. Niesprężone podgrupy $D_8 < SL(3, \mathbb{Z})$

Przyjrzyjmy się teraz wynikom konstrukcji dla dwóch niesprężonych reprezentacji grupy D_8 w $SL(3, \mathbb{Z})$, oznaczonych przez $D_8(1)$ i $D_8(2)$. Te przykłady pokazują, jak bardzo mogą różnić się wyniki konstrukcji (a nawet struktury ilorazów A^3 przez działanie grupy) dla izomorficznych, ale niesprężonych w $GL(3, \mathbb{Z})$ podgrup skończonych. W opisie zostaną pominięte szczegóły obliczeń, które zostały dobrze wytłumaczone przy analizie przypadku D_{12} (5.1). Przypomnijmy (zob. 3.2.3), że istnieją dwie klasy sprzężoności w $GL(3, \mathbb{Z})$ podgrup zawartych w $SL(3, \mathbb{Z})$ izomorficznych z D_8 .

Grupa D_8 zawiera podgrupę normalną \mathbb{Z}_4 . Kwadrat generatora tej podgrupy zadaje podgrupę normalną rzędu 2, jej grupa Weyla jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Pozostałe 4 elementy rzędu 2 tworzą dwie klasy sprzężoności podgrup rzędu 2, o grupie Weyla \mathbb{Z}_2 . Punkty o niecyklicznej grupie izotropii są punktami stałymi działania pewnej podgrupy typu D_4 lub całej grupy. Są dwie niesprężone podgrupy normalne izomorficzne z D_4 , każda z nich jest generowana przez kwadrat generatora \mathbb{Z}_4 oraz inny element rzędu 2.

Dla obu rozpatrywanych reprezentacji grupy D_8 wirtualny wielomian Poincaré ilorazu jest równy

$$P_Y(t) = t^6 + 2t^4 + 6t^3 + 2t^2 + 1.$$

5.2.1. $D_8(1)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\rangle$$

Działanie grupy G na A^3 w tym przypadku ma prostą strukturę. Tabela podsumowuje otrzymane w standardowy sposób informacje dotyczące krzywych punktów stałych dla podgrup cyklicznych. Oznaczmy wypisane w drugiej kolumnie generatory podgrup odpowiednio przez g_1, g_2, g_3 i g_4 . Elementy g_1, g_2 i g_3 są rzędu 2, a g_4 — rzędu 4. Ponadto $g_4^2 = g_3$.

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $2e_2 = 0$	16	\mathbb{Z}_2	$16 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = -e_3$ $2e_2 = 0$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $2e_3 = 0$	16	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$6 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_4 (A_3)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $e_1 = e_3$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Przyjrzyjmy się punktom o niecyklicznej grupie izotropii. Punkty stałe działania podgrupy $\langle g_1, g_3 \rangle \simeq D_4$ są wyznaczone przez równości $2e_1 = 2e_2 = 2e_3 = 0$. Takich punktów jest 64, ale 16 z nich, spełniające dodatkowo warunek $e_1 = e_3$, mają grupę izotropii równą G . Pozostałe są sklejane parami w ilorazie. Punkty stałe działania $\langle g_2, g_3 \rangle \simeq D_4$ to 16 punktów o grupie izotropii D_8 , te same, które pojawiły się poprzednio. Okazuje się, że są to wszystkie punkty stałe działania grupy G , więc iloraz zawiera 24 punkty o grupie izotropii D_4 oraz 16 punktów o grupie izotropii D_8 .

Każda krzywa punktów stałych podgrupy $\langle g_1 \rangle$ zawiera 3 punkty o grupie izotropii D_4 , nie sklejane w ilorazie, oraz 1 punkt stały działania G . Na każdej krzywej wyznaczonej przez podgrupę $\langle g_2 \rangle$ leżą 4 punkty stałe działania G . W A^3 jest 16 krzywych eliptycznych punktów stałych działania podgrupy $\langle g_3 \rangle$, ale 4 to krzywe punktów stałych działania większej grupy $\langle g_4 \rangle$, więc rozpatrujemy 12 pozostałych. Grupa Weyla $W(g_3)$ jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, generowana na przykład przez g_1 i g_4 . Generator g_1 działa przez inwolucję na każdej krzywej, natomiast działanie g_4 powoduje sklejanie krzywych parami w ilorazie — stąd 6 krzywych \mathbb{P}^1 w Y . Na każdej z 12 krzywych w A^3 leżą 4 punkty o grupie izotropii D_4 , reprezentujące różne punkty ilorazu. Tę samą własność mają krzywe po przejściu do A^3/G . Krzywe punktów stałych podgrupy $\langle g_4 \rangle$ zawierają po 4 punkty stałe działania G .

Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= P_Y(t) - 30(1 + t^2 - 4) - 40 = t^6 + 2t^4 + 6t^3 - 28t^2 + 51, \\ P_2(t) &= 26(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) + 4\mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4)(1 + (2 + \varepsilon)t^2)) = \\ &= 34t^4 + 8t^3 - 72t^2 - 90, \\ P_1(t) &= 24(1 + 3t^2) + 16(1 + 4t^2) = 136t^2 + 40, \end{aligned}$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 36t^4 + 14t^3 + 36t^2 + 1.$$

5.2.2. $D_8(2)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \right\rangle$$

Jak poprzednio, tabela podsumowuje informacje o krzywych punktów stałych dla cyklicznych podgrup G . Generatory podgrup oznaczmy przez g_1, g_2, g_3 i g_4 . Elementy g_1, g_2 i g_3 są rzędu 2, a g_4 — rzędu 4, mamy relację $g_4^2 = g_3$. Część danych została otrzymana tak jak w poprzednim przypadku, a pewne szczególne elementy zostały omówione poniżej.

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$e_2 = e_3$ $2e_1 = -2e_2$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $e_3 = e_1$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_3$ $2e_2 = -2e_1$	4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$3 \times \mathbb{P}^1$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_4 (A_3)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$e_1 = -e_2$ $e_1 = e_3$	1	\mathbb{Z}_2	$1 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Krzywe \mathbb{P}^1 dla podgrupy $\langle g_3 \rangle$ różnią się od pozostałych składowych jednowymiarowego stratum izomorficznych z \mathbb{P}^1 . Powstają one jako iloraz krzywych eliptycznych przez działanie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, a nie przez działanie \mathbb{Z}_2 , jak w większości przypadków. Generatory $W_K \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, na przykład g_4 i g_1 , działają na krzywych eliptycznych odpowiednio przez przesunięcie o punkt δ taki, że $2\delta = 0$, oraz inwolucję. Iloraz pierwszego działania daje w wyniku krzywą eliptyczną, na której mamy indukowane działanie przez inwolucję. Wobec tego ilorazem jest \mathbb{P}^1 , z czterokrotnym nakryciem na otwartej części (po wyrzuceniu punktów o wyższych grupach izotropii).

Nie musimy patrzeć topologicznie na iloraz krzywych przez działanie W_K , wystarczy zbadać punkty stałe indukowanego działania $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ na kohomologiach krzywej eliptycznej. Ponieważ przesunięcie indukuje trywialne przekształcenie styyczne, to wystarczy rozpatrywać działanie \mathbb{Z}_2 przez inwolucję, które w wymiarze 1 nie ma punktów stałych, a w wymiarach 0 i 2 jest identyfikacją. Otrzymujemy więc wielomian Poincaré ilorazu równy $1 + t^2$. Osobliwości na rozpatrywanych krzywych są typu A_1 , więc W_K działa trywialnie na kohomologiach włókna rozwiązania, czyli nie trzeba wypisywać wielomianu o współczynnikach w reprezentacjach.

Punkty stałe działania $\langle g_1, g_3 \rangle$ są opisane równościami $e_1 = e_2 = e_3$ i $4e_1 = 0$, więc jest ich 16. Spośród nich 4 spełniające warunek $2e_1 = 0$ są również punktami stałymi D_8 . Pozostałe 12 działanie g_4 skleja do 6 punktów w ilorazie. Punkty stałe podgrupy $\langle g_1, g_3 \rangle$ są zdefiniowane przez warunki $e_1 = e_3$ i $2e_1 = 2e_2 = 0$, również jest ich 16. Wśród nich 4 mają grupę izotropii D_8 , a z pozostałych 12 w ilorazie powstaje 6 punktów o grupie izotropii D_4 . Przecięcie tych

dwóch rodzin punktów to dokładnie punkty stałe działania D_8 . Wobec tego iloraz zawiera 4 punkty stałe D_8 i 12 punktów o grupie izotropii D_4 .

Trzy krzywe dla podgrupy $\langle g_1 \rangle$ zawierają po 4 punkty stałe działania $\langle g_1, g_3 \rangle$, które w ilorazie są parami utożsamiane. To utożsamienie nie pochodzi od działania normalizatora $N(g_1)$, więc otoczenia sklejanych punktów na krzywej nie są ze sobą utożsamiane. Stąd wynika, że wyjęcie z ilorazu dwóch punktów o grupie izotropii D_4 leżących na jednej z rozpatrywanych krzywych powoduje, że pozostała część krzywej jest izomorficzna z \mathbb{P}^1 bez czterech punktów. Czwarta krzywa punktów stałych podgrupy $\langle g_1 \rangle$ zawiera 4 punkty stałe działania G . Każda krzywa punktów stałych $\langle g_2 \rangle$ zawiera 3 punkty o grupie izotropii D_4 , różne w ilorazie, oraz 1 punkt stały G . Na krzywej punktów stałych działania \mathbb{Z}_4 leżą 4 punkty stałe działania D_8 .

Trochę ciekawszy jest przypadek krzywych wyznaczanych przez podgrupę $\langle g_3 \rangle$. Na każdej z trzech krzywych znajdują się 4 punkty o grupie izotropii $\langle g_1, g_3 \rangle$ oraz 4 punkty o grupie izotropii $\langle g_2, g_3 \rangle$. Punkty w obu czwórkach są parami utożsamiane w ilorazie. Tym razem utożsamienie pochodzi od działania grupy Weyla — sklejane są nie tylko punkty na krzywej, ale również ich otoczenia na krzywej. We wspomnianej wcześniej interpretacji topologicznej brania ilorazu krzywej przez działanie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, punkty są utożsamiane przez działanie jednego z generatorów, a trzymane w miejscu przez drugi. Dla każdej czwórki stabilizatorem jest podgrupa $\mathbb{Z}_2 < W_K \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, a pozostałe dwa elementy działają jako translacje. Stabilizatory czwórek są różnymi podgrupami W_K . W ilorazie z każdej krzywej po wyrzuceniu punktów o niecyklicznej grupie izotropii w ilorazie zostaną zbiory postaci \mathbb{P}^1 bez czterech punktów. Natomiast rozwiązanie osobliwości tych krzywych to iloraz wiązki nad krzywą eliptyczną bez 8 punktów. W obliczeniach trzeba uwzględnić działanie grupy W_K na wyrzucanych punktach. Ponieważ zamienia ono punkty parami, to po zmianie bazy reprezentacja w zerowych kohomologiach zbioru ośmiu punktów może być zapisana jako $4(1 + \varepsilon)$. Wobec tego wirtualny wielomian Poincaré dla jednej krzywej wynosi:

$$\mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4(1 + \varepsilon))(1 + t^2)) = (1 + t^2 - 4)(1 + t^2).$$

Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= P_Y(t) - 12(1 + t^2 - 4) - 16 = t^6 + 2t^4 + 6t^3 - 10t^2 + 21, \\ P_2(t) &= 11(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) + \mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4)(1 + (2 + \varepsilon)t^2)) = \\ &= 13t^4 + 2t^3 - 27t^2 - 36, \\ P_1(t) &= 12(1 + 3t^2) + 4(1 + 4t^2) = 52t^2 + 16, \end{aligned}$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 15t^4 + 8t^3 + 15t^2 + 1.$$

Rozdział 6

Wyniki obliczeń

Przedstawiamy wyniki obliczeń kohomologii rozmaitości otrzymywanych przez uogólnioną konstrukcję Kummera we wszystkich przypadkach, które nie zostały zawarte w rozdziale 5. Opis nie zawiera szczegółowej analizy. Odnotowane zostały tylko pewne informacje o działaniu badanych grup na A^3 , strukturze ilorazu (krzywe punktów stałych, ich równania) i pośrednie wyniki obliczeń (wielomiany dla poszczególnych stratów).

Obliczenia częściowo zostały wykonane za pomocą programu GAP ([GAP]), który pomógł wyznaczyć podgrupy i ich normalizatory we wszystkich rozpatrywanych grupach oraz uprościć układy równań opisujące zbiory punktów stałych działania.

6.1. D_4

Dla wszystkich podanych reprezentacji grupy D_4 (wirtualny) wielomian Poincaré ilorazu jest równy

$$P_Y(t) = t^6 + 3t^4 + 8t^3 + 3t^2 + 1.$$

Grupa D_4 ma trzy normalne podgrupy rzędu 2 wyznaczające krzywe o grupie izotropii \mathbb{Z}_2 . Punkty leżące w przecięciach tych krzywych mają grupę izotropii D_4 .

6.1.1. $D_4(1)$

$$G = \left\langle \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $2e_2 = 0$	16	\mathbb{Z}_2	$16 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$2e_2 = 0$ $2e_3 = 0$	16	\mathbb{Z}_2	$16 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $2e_3 = 0$	16	\mathbb{Z}_2	$16 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Punkty o grupie izotropii D_4 spełniają równania $2e_1 = 2e_2 = 2e_3 = 0$, jest ich 64, na każdej krzywej leżą 4 punkty. Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= P_Y(t) - 48(1 + t^2 - 4) - 64 = t^6 + 3t^4 + 8t^3 - 45t^2 + 81, \\ P_2(t) &= 48(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) = 48t^4 - 96t^2 - 144, \\ P_1(t) &= 64(1 + 3t^2) = 192t^2 + 64, \end{aligned}$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 51t^4 + 8t^3 + 51t^2 + 1.$$

6.1.2. $D_4(2)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $2e_2 = 0$	16	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$ $6 \times A$	\mathbb{Z}_2 0
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_2$ $2e_3 = 0$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$e_1 = -e_2$ $2e_3 = 0$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Punkty o grupie izotropii D_4 spełniają równania $2e_1 = 2e_2 = 2e_3 = 0$ oraz $e_1 = e_2$, więc jest ich 16. Na każdej krzywej leżą 4 punkty o większej grupie izotropii, natomiast krzywe eliptycznie nie zawierają tych punktów. Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= P_Y(t) - 12(1 + t^2 - 4) - 6(1 + 2t + t^2) - 16 = t^6 + 3t^4 + 8t^3 - 15t^2 - 12t + 15, \\ P_2(t) &= 12(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) + 6(1 + 2t + t^2)(1 + t^2) = 18t^4 + 12t^3 - 12t^2 + 12t - 30, \\ P_1(t) &= 16(1 + 3t^2) = 48t^2 + 16, \end{aligned}$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 21t^4 + 20t^3 + 21t^2 + 1.$$

6.1.3. $D_4(3)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $e_2 = -e_3$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$2e_2 = 0$ $e_2 = e_3$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$e_2 = e_3$ $2e_1 = -2e_2$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Punkty o grupie izotropii D_4 są wyznaczone przez warunki $2e_1 = 2e_2 = 0$ i $e_2 = e_3$; jest ich 16, na każdej krzywej leżą 4 punkty. Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$P_3(t) = P_Y(t) - 12(1 + t^2 - 4) - 16 = t^6 + 3t^4 + 8t^3 - 9t^2 + 21,$$

$$P_2(t) = 12(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) = 12t^4 - 24t^2 - 36,$$

$$P_1(t) = 16(1 + 3t^2) = 48t^2 + 16,$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 15t^4 + 8t^3 + 15t^2 + 1.$$

6.1.4. $D_4(4)$

$$G = \left\langle \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$e_2 = e_3$ $2e_1 = -2e_2$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_3$ $2e_2 = -2e_1$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_2$ $2e_3 = -2e_1$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Punkty stałe działania D_4 muszą spełniać $e_1 = e_2 = e_3$ oraz $4e_1 = 0$. Wobec tego jest ich 16, na każdej krzywej leżą 4 punkty. Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$P_3(t) = P_Y(t) - 12(1 + t^2 - 4) - 16 = t^6 + 3t^4 + 8t^3 - 9t^2 + 21,$$

$$P_2(t) = 12(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) = 12t^4 - 24t^2 - 36,$$

$$P_1(t) = 16(1 + 3t^2) = 48t^2 + 16,$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 15t^4 + 8t^3 + 15t^2 + 1.$$

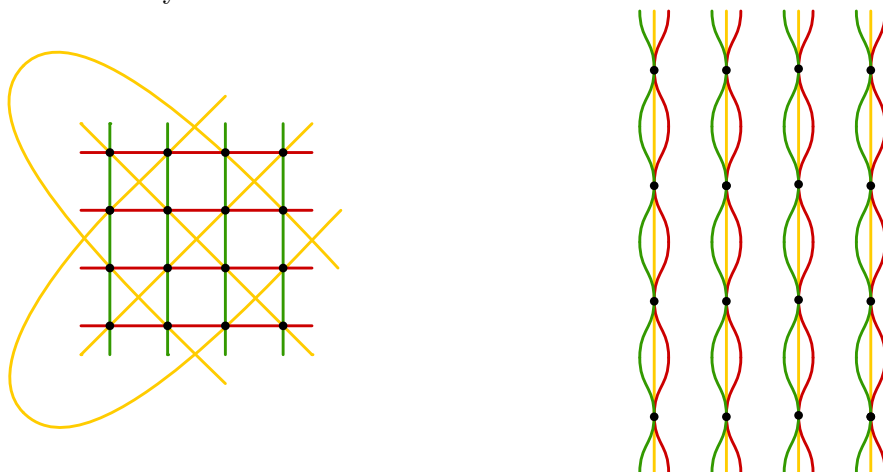
Jak widać, nie tylko kohomologie, ale również wielomiany poszczególnych stratów są takie same, jak w poprzednim przypadku (6.1.3).

Dlaczego przypadki 6.1.3 i 6.1.4 są różne?

Dla przypadków 6.1.3 i 6.1.4 nie tylko wielomiany Poincaré są takie same, ale również zgadza się liczba krzywych i punktów osobliwych. Okazuje się jednak, że te przypadki są różne — dla działania grupy 6.1.3 zbiór punktów o nietrywialnej grupie izotropii jest spójny, natomiast w przypadku 6.1.4 tak nie jest. Spróbujmy przyjrzeć się temu dokładniej. W poniższych rozważaniach przyjmujemy, że α i β oznaczają rozwiązania równania $2x = 0$ na krzywej eliptycznej, natomiast x jest parametrem przebiegającym krzywą eliptyczną.

Dla grupy z przypadku 6.1.3 punkty o grupie izotropii D_4 mają współrzędne (α, β, β) , dla wszystkich możliwych wartości α i β . Krzywe punktów stałych pierwszej podgrupy \mathbb{Z}_2 mają parametryzację $(\alpha, x, -x)$ — wartość α wyznacza jedną z czterech krzywych. Na krzywej wyznaczonej przez ustaloną wartość α_0 leżą 4 punkty o grupie izotropii D_4 — są to punkty (α_0, β, β) . Krzywe dla drugiej podgrupy \mathbb{Z}_2 są opisane parametryzacją (x, β, β) . Krzywa wyznaczona przez β_0 zawiera cztery punkty o grupie izotropii D_4 , są to $(\alpha, \beta_0, \beta_0)$. Wobec tego krzywa dla pierwszej podgrupy \mathbb{Z}_2 wyznaczona przez α_0 przecina się z krzywą dla drugiej podgrupy wyznaczoną przez β_0 w punkcie o współrzędnych $(\alpha_0, \beta_0, \beta_0)$. Stąd wynika, że suma pierwszego i zerowego stratum w ilorazie Y jest spójna, niezależnie od ułożenia krzywych dla trzeciej z podgrup \mathbb{Z}_2 (wiemy, że każda z nich zawiera punkt o grupie izotropii D_4).

Przyjrzyjmy się teraz przypadkowi 6.1.4. Krzywe punktów stałych dla kolejnych podgrup \mathbb{Z}_2 mają parametryzacje odpowiednio: $(\alpha - x, x, x)$, $(x, \alpha - x, x)$ oraz $(x, x, \alpha - x)$ — mamy trzy rodziny po 4 krzywe odpowiadające przyjmowanym wartości α . Punkty o grupie izotropii D_4 mają współrzędne (γ, γ, γ) , gdzie γ spełnia warunek $4\gamma = 0$. Krzywa z dowolnej rodziny wyznaczona przez ustaloną wartość α_0 zawiera punkty o współrzędnych spełniających równość $2\gamma = \alpha_0$. Wobec tego suma zerowego i pierwszego stratum w Y ma cztery składowe spójności, odpowiadające wartościom przyjmowanym przez α . Stąd wniosek, że grupy $D_4(3)$ i $D_4(4)$ nie są sprzężone w $GL(3, \mathbb{Z})$, ponieważ ich działania na A^3 definiują niezomorficzne zbiory punktów osobliwych w ilorazie.



Powyższy rysunek to schemat sumy stratów wymiaru 0 i 1 dla obu omawianych przypadków. Lewa część odnosi się do przypadku 6.1.3 (punkty przecięcia krzywych są oznaczone czarnymi kropkami). Prawa rysunku to 4 rozłączne grupy krzywych dla przypadku 6.1.4. Kolory odpowiadają rodzinom krzywych dla trzech podgrup izomorficznych z \mathbb{Z}_2 w grupie D_4 .

Warto zauważyć, że transpozycja przekształca reprezentację D_4 z przypadku 6.1.3 na reprezentację sprzężoną z tą z przypadku 6.1.4.

6.2. D_6

Dla wszystkich podanych reprezentacji grupy D_6 wirtualny wielomian Poincaré ilorazu jest równy

$$P_Y(t) = t^6 + 2t^4 + 6t^3 + 2t^2 + 1.$$

Grupa S_3 ma cykliczną podgrupę normalną rzędu 3. Elementy rzędu 2 tworzą trzy podgrupy \mathbb{Z}_2 , które są ze sobą sprzężone. Wszystkie właściwe podgrupy S_3 są cykliczne, więc punkty o niecyklicznej grupie izotropii muszą być punktami stałymi działania S_3 .

6.2.1. $D_6(1)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$e_1 = 0$ $2e_3 = 0$	4	0	$4 \times A$	0
$\mathbb{Z}_3 (A_2)$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_2$ $3e_1 = 0$	9	\mathbb{Z}_2	$4 \times A$ $1 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Punkty stałe działania D_6 są wyznaczone przez równości $e_1 = e_2 = 0$ i $2e_3 = 0$, więc jest ich 4. Przez każdy z nich przechodzi dokładnie jedna krzywa eliptyczna punktów stałych \mathbb{Z}_2 . Wszystkie cztery leżą na \mathbb{P}^1 punktów stałych \mathbb{Z}_3 . Krzywe eliptyczne punktów stałych \mathbb{Z}_3 nie zawierają punktów o większej grupie izotropii. Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= P_Y(t) - 4(1 + 2t + t^2 - 1) - 4(1 + 2t + t^2) - (1 + t^2 - 4) - 4 = \\ &= t^6 + 2t^4 + 6t^3 - 7t^2 - 16t - 4, \\ P_2(t) &= 4(1 + 2t + t^2 - 1)(1 + t^2) + 4(1 + 2t + t^2)(1 + 2t^2) + \\ &\quad + \mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4)(1 + (1 + \varepsilon)t^2)) = 13t^4 + 26t^3 + 14t^2 + 16t + 1, \\ P_1(t) &= 4(1 + 2t^2) = 8t^2 + 4, \end{aligned}$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 15t^4 + 32t^3 + 15t^2 + 1.$$

6.2.2. $D_6(2)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$e_1 = -e_2$ $2e_3 = 0$	4	0	$4 \times A$	0
$\mathbb{Z}_3 (A_2)$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = e_2$ $3e_1 = 0$	9	\mathbb{Z}_2	$9 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Punkty stałe działania D_6 spełniają $3e_1 = 0$, $e_2 = 2e_1$ i $2e_3 = 0$. Wobec tego jest ich 36, ponadto na każdej krzywej eliptycznej punktów stałych \mathbb{Z}_2 leży 9 z tych punktów, a na każdej \mathbb{P}^1 punktów stałych \mathbb{Z}_3 leżą 4 punkty. Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$P_3(t) = P_Y(t) - 4(1 + 2t + t^2 - 9) - 9(1 + t^2 - 4) - 36 = t^6 + 2t^4 + 6t^3 - 11t^2 - 8t + 24,$$

$$P_2(t) = 4(1 + 2t + t^2 - 9)(1 + t^2) + 9\mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4)(1 + (1 + \varepsilon)t^2)) = \\ = 13t^4 + 26t^3 - 46t^2 + 8t - 59,$$

$$P_1(t) = 36(1 + 2t^2) = 72t^2 + 36,$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 15t^4 + 32t^3 + 15t^2 + 1.$$

6.2.3. $D_6(3)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $e_2 = -e_3$	4	0	$4 \times A$	0
$\mathbb{Z}_3 (A_2)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = -e_2$ $e_2 = e_3$	1	\mathbb{Z}_2	$1 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Punkty stałe działania są zadane równościami $2e_1 = 0$ i $e_1 = e_2 = e_3$, jest ich 4. Wszystkie leżą na krzywej \mathbb{P}^1 punktów stałych \mathbb{Z}_3 , przez każdy przechodzi jedna krzywa eliptyczna punktów stałych \mathbb{Z}_2 . Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$P_3(t) = P_Y(t) - 4(1 + 2t + t^2 - 1) - (1 + t^2 - 4) - 4 = t^6 + 2t^4 + 6t^2 - 3t^2 - 8t,$$

$$P_2(t) = 4(1 + 2t + t^2 - 1)(1 + t^2) + \mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4)(1 + (1 + \varepsilon)t^2)) = \\ = 5t^4 + 10t^3 + 2t^2 + 8t - 3,$$

$$P_1(t) = 4(1 + 2t^2) = 8t^2 + 4,$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 7t^4 + 16t^3 + 7t^2 + 1.$$

6.3. A_4

Dla wszystkich podanych reprezentacji grupy A_4 wirtualny wielomian Poincaré ilorazu jest równy

$$P_Y(t) = t^6 + t^4 + 4t^3 + t^2 + 1.$$

Grupa A_4 ma dość prostą strukturę. Wszystkie jej podgrupy cykliczne rzędu 3 są sprzężone, tak samo wszystkie podgrupy rzędu 2. Jedyna właściwa podgrupa niecykliczna, złożona ze wszystkich elementów rzędu 2, jest izomorficzna z D_4 i normalna.

6.3.1. $A_4(1)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $2e_2 = 0$	16	\mathbb{Z}_2	$16 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_3 (A_2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_2$ $e_2 = e_3$	1	0	$1 \times A$	0

Punkty o grupie izotropii D_4 są zadane przez równości $2e_1 = 2e_2 = 2e_3 = 0$, jest ich 64. Elementy rzędu 3 działają na tych punktach, permutując współrzędne. Nie otrzymujemy wszystkich permutacji, tylko jeden cykl długości 3, więc punkty są sklejane trójkami w ilorazie, poza 4 punktami stałymi działania A_4 . Wobec tego najniższe stratum składa się z 20 punktów o grupie izotropii D_4 i 4 punktów stałych działania A_4 . Na krzywej eliptycznej punktów stałych \mathbb{Z}_3 leżą wszystkie 4 punkty stałe A_4 . Na każdej krzywej punktów stałych \mathbb{Z}_2 leżą 4 punkty o większej grupie izotropii, niesklejane w ilorazie.

Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$P_3(t) = P_Y(t) - 16(1 + t^2 - 4) - (1 + 2t + t^2 - 4) - 24 = t^6 + t^4 + 4t^3 - 16t^2 - 2t + 28,$$

$$P_2(t) = 16(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) + (1 + 2t + t^2 - 4)(1 + 2t^2) = 18t^4 + 4t^3 - 37t^2 + 2t - 51,$$

$$P_1(t) = 20(1 + 3t^2) + 4(1 + 3t^2) = 72t^2 + 24,$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 19t^4 + 8t^3 + 19t^2 + 1.$$

6.3.2. $A_4(2)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$e_2 = e_3$ $2e_1 = -2e_2$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_3 (A_2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_2$ $e_2 = e_3$	1	0	$1 \times A$	0

Punkty stałe działania D_4 spełniają równości $e_1 = e_2 = e_3$ oraz $4e_1 = 0$, jest ich 16. Generator \mathbb{Z}_3 działa na nich trywialnie, więc wszystkie są punktami stałymi działania A_4 . Wszystkie te punkty leżą na krzywej eliptycznej punktów stałych dla \mathbb{Z}_3 , na każdej krzywej \mathbb{P}^1 punktów stałych \mathbb{Z}_2 leżą 4 punkty stałe A_4 .

Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= P_Y(t) - 4(1 + t^2 - 4) - (1 + 2t + t^2 - 16) - 16 = t^6 + t^4 + 4t^3 - 4t^2 - 2t + 12, \\ P_2(t) &= 4(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) + (1 + 2t + t^2 - 16)(1 + 2t^2) = 6t^4 + 4t^3 - 37t^2 + 2t - 27, \\ P_1(t) &= 16(1 + 3t^2) = 48t^2 + 16, \end{aligned}$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 7t^4 + 8t^3 + 7t^2 + 1.$$

6.3.3. $A_4(3)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $e_3 = e_1 + e_2$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_3 (A_2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_2$ $e_2 = e_3$	1	0	$1 \times A$	0

Punkty stałe działania D_4 są opisane przez warunki $2e_1 = 2e_2 = 0$ i $e_3 = e_1 + e_2$. Tych punktów jest 16, wśród nich jest jeden punkt stały działania A_4 , a pozostałe są sklejane trójkami w ilorazie i tworzą 5 punktów o grupie izotropii D_4 . Krzywa punktów stałych \mathbb{Z}_3 zawiera tylko punkt stały A_4 . Na jednej z krzywych \mathbb{P}^1 leżą cztery różne punkty o większej grupie izotropii, w tym punkt stały A_4 . Na pozostałych krzywych dwa z czterech punktów stałych inwolucji sklejają się w ilorazie, przy czym utożsamienie nie pochodzi od działania normalizatora. Wobec tego obrazy tych krzywych w Y przechodzą przez trzy punkty o grupie izotropii D_4 , przez jeden dwukrotnie.

Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$P_3(t) = P_Y(t) - 4(1 + t^2 - 4) - (1 + 2t + t^2 - 1) - 6 = t^6 + t^4 + 4t^3 - 4t^2 - 2t + 7,$$

$$P_2(t) = 4(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) + (1 + 2t + t^2 - 1)(1 + 2t^2) = 6t^4 + 4t^3 - 7t^2 + 2t - 12,$$

$$P_1(t) = 5(1 + 3t^2) + (1 + 3t^2) = 18t^2 + 6,$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 7t^4 + 8t^3 + 7t^2 + 1.$$

6.4. S_4

Dla wszystkich podanych reprezentacji grupy S_4 wirtualny wielomian Poincaré ilorazu jest równy

$$P_Y(t) = t^6 + t^4 + 4t^3 + t^2 + 1.$$

Grupa S_4 ma dwie klasy sprzężoności podgrup \mathbb{Z}_2 . Jedną tworzą kwadraty elementów rzędu 4, drugą pozostałe elementy rzędu 2. Wszystkie podgrupy izomorficzne z \mathbb{Z}_4 są sprzężone, tak samo wszystkie podgrupy \mathbb{Z}_3 . Podgrupy typu D_4 tworzą dwie klasy sprzężoności. W pierwszej jest tylko jedna podgrupa normalna w S_4 , o grupie Weyla D_6 . W drugiej znajdują się trzy sprzężone podgrupy, których grupa Weyla to \mathbb{Z}_2 . Wszystkie cztery podgrupy D_6 są sprzężone, tak samo wszystkie trzy podgrupy D_8 , grupa Weyla tych podgrup jest trywialna. Poza tym jest jeszcze jedna podgrupa normalna A_4 .

6.4.1. $S_4(1)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle$$

Ten przypadek został opisany w pracy [AW08], ale dla zupełności opracowania podajemy tutaj wyniki obliczeń.

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_2$ $2e_3 = 0$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $2e_2 = 0$	16	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$6 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_3 (A_2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_3$ $e_1 = e_2$	1	\mathbb{Z}_2	$1 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_4 (A_3)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_2$ $2e_1 = 0$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Zbiór punktów o niecyklicznych grupach izotropii zawiera 24 punkty dla podgrup D_4 , z których w ilorazie powstają 4 punkty osobliwe. Dalej mamy 36 punktów o grupie izotropii

D_6 , w trzech rodzinach odpowiadających sprzężonym podgrupom, które są sklejane do 12 punktów w ilorazie, oraz 4 punkty stałe działania S_4 .

Na każdej krzywej dla pierwszej z podgrup \mathbb{Z}_2 leżą 3 punkty o grupie izotropii D_8 , niesklejane w ilorazie, oraz 1 punkt stały działania grupy. Krzywe definiowane przez drugą podgrupę \mathbb{Z}_2 zawierają po 2 punkty o grupie izotropii D_4 oraz po 2 punkty o grupie izotropii D_8 . Dla każdej krzywej w ilorazie te 4 punkty są różne. Krzywa dla podgrupy \mathbb{Z}_3 zawiera 4 punkty stałe działania G . Na każdej krzywej punktów o grupie izotropii \mathbb{Z}_4 leży 1 punkt stały działania całej grupy oraz 3 punkty dla podgrupy D_8 , różne w ilorazie.

Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= P_Y(t) - 15(1 + t^2 - 4) - 20 = t^6 + t^4 + 4t^3 - 14t^2 + 26, \\ P_2(t) &= 10(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) + \mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4)(1 + (1 + \varepsilon)t^2)) + \\ &\quad + 4\mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4)(1 + (2 + \varepsilon)t^2)) = 19t^4 + 10t^3 - 42t^2 - 45, \\ P_1(t) &= 16(1 + 4t^2) + 4(1 + 3t^2) = 76t^2 + 20, \end{aligned}$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 20t^4 + 14t^3 + 20t^2 + 1.$$

6.4.2. $S_4(2)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $e_1 = e_2$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_3$ $2e_2 = -2e_1$	4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$3 \times \mathbb{P}^1$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_3 (A_2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = e_3$ $e_1 = e_2$	1	\mathbb{Z}_2	$1 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_4 (A_3)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$e_1 = -e_2$ $e_1 = e_3$	1	\mathbb{Z}_2	$1 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Punkty o grupie izotropii D_4 dzielą się na trzy rodziny po 12 punktów, wewnątrz których punkty są sklejane parami przez działanie normalizatora. W ilorazie na każdy punkt osobliwy dla podgrupy D_4 przechodzi jeden punkt z każdej rodziny. Ponadto jest 12 punktów o grupie izotropii A_4 , które działanie normalizatora skleja parami, oraz 4 punkty stałe działania grupy G .

Krzywe dla pierwszej z podgrup \mathbb{Z}_2 zawierają po 3 punkty o grupie izotropii D_4 , różne w ilorazie, oraz po 1 punkcie stałym S_4 . Krzywe \mathbb{P}^1 dla drugiej podgrupy \mathbb{Z}_2 są czterokrotnie nakrywane przez ich przeciwobraz w A^3 (tak jak w przypadku 5.2.2). Na każdej z tych krzywych leżą 4 punkty o grupie izotropii D_4 oraz 4 punkty o grupie izotropii A_4 , z każdej z tych

czwórek powstają 2 punkty w ilorazie. Krzywa dla podgrupy \mathbb{Z}_3 zawiera 12 punktów o grupie izotropii A_4 , sklejających się do 6 w ilorazie, oraz 4 punkty stałe S_4 . Natomiast krzywa dla \mathbb{Z}_4 zawiera tylko 4 punkty stałe działania S_4 .

Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$P_3(t) = P_Y(t) - 8(1 + t^2 - 4) - (1 + t^2 - 10) - 16 = t^6 + t^4 + 4t^3 - 8t^2 + 18,$$

$$\begin{aligned} P_2(t) &= 4(1 + t^2 - 4)(1 + t^2) + 3\mu_0((1 + t^2 - 4(1 + \varepsilon))(1 + t^2)) + \\ &\quad + \mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4 - 6(1 + \varepsilon))(1 + (1 + \varepsilon)t^2)) + \\ &\quad + \mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4)(1 + (2 + \varepsilon)t^2)) = 10t^4 + 4t^3 - 33t^2 - 33, \end{aligned}$$

$$P_1(t) = 12(1 + 3t^2) + 4(1 + 4t^2) = 52t^2 + 16,$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 11t^4 + 8t^3 + 11t^2 + 1.$$

6.4.3. $S_4(3)$

$$G = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\rangle$$

grupa	generator	równania	składowe	$W(g)$	iloraz	W_K
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $e_2 = -e_3$	4	\mathbb{Z}_2	$4 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2 (A_1)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$2e_1 = 0$ $e_3 = e_1 + e_2$	4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$3 \times \mathbb{P}^1$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_3 (A_2)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = 0$ $e_3 = 0$	1	\mathbb{Z}_2	$1 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_4 (A_3)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$e_1 = 0$ $e_2 = e_3$	1	\mathbb{Z}_2	$1 \times \mathbb{P}^1$	\mathbb{Z}_2

Punkty o grupie izotropii D_4 to trzy rodziny po 12 punktów, przechodzące w ilorazie na zbiory 6 punktów, utożsamiane przez działanie grupy, oraz 6 punktów, które w ilorazie przechodzą na 1 punkt osobliwy. Są cztery rodziny po 3 punkty o grupie izotropii D_6 , sklejane w ilorazie, ale na każdej rodzinie normalizator podgrupy działa trywialnie. Punkty o grupie izotropii D_8 tworzą trzy rodziny po 3 punkty, utożsamiane w ilorazie; na każdej rodzinie normalizator działa trywialnie. Ponadto jest 1 punkt stały działania S_4 .

Trzy z krzywych dla pierwszej podgrupy \mathbb{Z}_2 zawierają po 4 punkty stałe działania W_K , o grupie izotropii D_4 , które w ilorazie sklejają się parami na każdej krzywej. Ponieważ W_K działa na nich trywialnie, to w ilorazie po wyjęciu dwóch punktów osobliwych o grupie izotropii D_4 otrzymujemy krzywą \mathbb{P}^1 bez czterech punktów. Przez takie dwa punkty w ilorazie krzywa przechodzi dwukrotnie. Ponadto na tych krzywych leżą jeszcze po 2 punkty o grupie izotropii D_6 , które są sklejane przez działanie W_K na każdej krzywej (czyli ich otoczenia na krzywych też są sklejane). Czwarta krzywa dla pierwszej podgrupy \mathbb{Z}_2 zawiera 3 punkty o

grupie izotropii D_8 , niesklejane w ilorazie, oraz 1 punkt stały działania S_4 . Krzywe \mathbb{P}^1 dla drugiej podgrupy \mathbb{Z}_2 są czterokrotnie nakrywane przez ich przeciwobraz w A^3 (tak jak w przypadku 5.2.2). Każda z tych krzywych zawiera 6 punktów o grupie izotropii D_4 oraz 2 punkty o grupie izotropii D_3 , wszystkie sklejane parami przez działanie W_K na krzywych. Krzywa dla podgrupy \mathbb{Z}_3 zawiera 3 punkty o grupie izotropii D_6 , różne w ilorazie, oraz 1 punkt stały S_4 . Krzywa punktów o grupie izotropii \mathbb{Z}_4 zawiera 3 punkty stałe podgrupy D_8 , niesklejane w ilorazie, oraz 1 punkt stały działania S_4 .

Wirtualne wielomiany Poincaré stratów są następujące:

$$\begin{aligned}
P_3(t) &= P_Y(t) - 3(1 + t^2 - 5) - 6(1 + t^2 - 4) - 14 = t^6 + t^4 + 4t^3 - 8t^2 + 17, \\
P_2(t) &= (1 + t^2 - 4)(1 + t^2) + 3\mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4 - (1 + \varepsilon))(1 + t^2)) + \\
&\quad + 3\mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4(1 + \varepsilon))(1 + t^2)) + \mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4)(1 + (1 + \varepsilon)t^2)) + \\
&\quad + \mu_0((1 + \varepsilon \cdot 2t + t^2 - 4)(1 + (2 + \varepsilon)t^2)) = 10t^4 + 4t^3 - 20t^2 - 30, \\
P_1(t) &= 7(1 + 3t^2) + 3(1 + 2t^2) + 4(1 + 3t^2) = 39t^2 + 14,
\end{aligned}$$

a wielomian otrzymanej rozmaitości jest równy

$$P_X(t) = t^6 + 11t^4 + 8t^3 + 11t^2 + 1.$$

6.5. Zestawienie wyników

Poniższe twierdzenie podsumowuje rezultaty pracy. Dowód stanowią zaprezentowane w tym i poprzednim rozdziale obliczenia.

Twierdzenie 6.1. *Wielomiany Poincaré dla rozmaitości otrzymywanych przez konstrukcję Kummera dla produktu trzech krzywych eliptycznych są następujące:*

<i>grupa</i>	<i>przypadek</i>	<i>wielomian</i>
D_4	6.1.1	$t^6 + 51t^4 + 8t^3 + 51t^2 + 1$
D_4	6.1.2	$t^6 + 21t^4 + 20t^3 + 21t^2 + 1$
D_4	6.1.3	$t^6 + 15t^4 + 8t^3 + 15t^2 + 1$
D_4	6.1.4	$t^6 + 15t^4 + 8t^3 + 15t^2 + 1$
D_6	6.2.1	$t^6 + 15t^4 + 32t^3 + 15t^2 + 1$
D_6	6.2.2	$t^6 + 15t^4 + 32t^3 + 15t^2 + 1$
D_6	6.2.3	$t^6 + 7t^4 + 16t^3 + 7t^2 + 1$
D_8	5.2.1	$t^6 + 36t^4 + 14t^3 + 36t^2 + 1$
D_8	5.2.2	$t^6 + 15t^4 + 8t^3 + 15t^2 + 1$
D_{12}	5.1	$t^6 + 21t^4 + 20t^3 + 21t^2 + 1$
A_4	6.3.1	$t^6 + 19t^4 + 8t^3 + 19t^2 + 1$
A_4	6.3.2	$t^6 + 7t^4 + 8t^3 + 7t^2 + 1$
A_4	6.3.3	$t^6 + 7t^4 + 8t^3 + 7t^2 + 1$
S_4	6.4.1	$t^6 + 20t^4 + 14t^3 + 20t^2 + 1$
S_4	6.4.2	$t^6 + 11t^4 + 8t^3 + 11t^2 + 1$
S_4	6.4.3	$t^6 + 11t^4 + 8t^3 + 11t^2 + 1$

6.6. Pytania

Przede wszystkim okazuje się, że znajomość wielomianów Poincaré nie wystarcza, żeby stwierdzić, czy wszystkie rozmaitości otrzymane w wyniku konstrukcji Kummera dla klas sprzężoności skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$ są różne. Być może jakieś inne niezmienniki pozwalają je rozróżnić. Za tą tezę przemawia fakt, że nie widać żadnego naturalnego dla konstrukcji Kummera izomorfizmu rozmaitości o tych samych kohomologiach — struktury zbiorów punktów osobliwych dla działania dualnych grup we wszystkich przypadkach są różne. Najbardziej zbliżone struktury to te wyznaczone przez grupy $D_4(3)$ (przypadek 6.1.3) i $D_4(4)$ (przypadek 6.1.4), ale jak wykazaliśmy w 6.1.4, one również nie są takie same.

Niezależnie od opisanego powyżej problemu w wynikach pojawia się ciekawa własność, którą warto dokładniej zbadać. W rozdziale 3 zdefiniowaliśmy pojęcie dualności skończonych grup liniowych lub ich klas sprzężoności (def. 3.2.1). Uwaga 3.2.2 podaje pary dualnych klas skończonych podgrup $SL(3, \mathbb{Z})$. Obliczenia zaprezentowane w tym rozdziale wykazują, że rozmaitości Kummera dla dualnych grup mają takie same wielomiany Poincaré. Można się zastanawiać, czy zaobserwowana prawidłowość zachodzi w innych przypadkach, czy jest specyficzną własnością trójwymiarowego przypadku uogólnionej konstrukcji Kummera. Jeśli okaże się, że te rozmaitości nie tylko mają takie same wielomiany Poincaré, ale są izomorficzne, to oczywiście pojawia się pytanie, czy w wyższych wymiarach dla dualnych grup konstrukcja daje w wyniku izomorficzne rozmaitości.

Można również próbować zrozumieć relacje pomiędzy rozmaitościami Kummera dla grupy G i jej wybranej podgrupy H . Na mocy lematu 1.3 istnieje odwzorowanie wymierne z rozmaitości dla H w rozmaitość dla G . Być może badanie tych odwzorowań pozwoli lepiej zrozumieć uogólnioną konstrukcję Kummera. Dla przypadku trójwymiarowego przeglądając wyniki obliczeń w punkcie 6.1 oraz diagram zawierania klas sprzężoności badanych grup (uwaga 3.2.3) można zaobserwować, że jeśli grupy G i H nie są izomorficzne, a ich rozmaitości Kummera mają takie same wielomiany Poincaré, to H jest podgrupą G (lub odwrotnie). Można zapytać, jaka musi być relacja między grupą G a jej podgrupą H , żeby konstrukcja Kummera dawała dla nich w wyniku rozmaitości o tych samych liczbach Bettiego.

Warto również zbadać, czy trójwymiarowe rozmaitości Kummera pojawiają się wśród znanych przykładów rozmaitości Calabi–Yau i w jaki sposób są opisywane. Poznanie innego opisu tych rozmaitości może pomóc w znalezieniu odpowiedzi na postawione wcześniej pytania.

Bibliografia

- [AW08] Marco Andreatta, Jarosław A. Wiśniewski, *On Kummer Construction*, arXiv:0804.4611v1 [math.AG].
- [Ar07] Donu Arapura, *Complex Algebraic Varieties and their Cohomology*, <http://www.math.purdue.edu/Xdvh/book.html>.
- [BM94] J. Bertin, D. Markushevich, *Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Calabi-Yau*, Math. Ann., 299(1):105-116, 1994.
- [Br72] Glen E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, 1972.
- [CARAT] Crystallographic AlgoRithms And Tables, <http://wwwb.math.rwth-aachen.de/carat>
- [Fu93] William Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Mathematics Studies 131, Princeton University Press, 1993.
- [FH91] William Fulton, Joe Harris *Representation Theory, A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [GAP] The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.10; 2007 (<http://www.gap-system.org>)
- [Ha77] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1977.
- [KP02] James Kuzmanovich, Andrey Pavlichenkov, *Finite Groups of Matrices Whose Entries Are Integers*, The American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 2, p. 173-186, 2002.
- [Ku75] Ernst Eduard Kummer, *Über die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten*, Springer-Verlag, 1975, Collected papers, Volume II: Function theory, geometry and miscellaneous.
- [Ne72] Morris Newman, *Integral Matrices*, Academic Press, 1972.
- [OPS98] J. Opgenorth, W. Plesken, T. Schulz, *Crystallographic Algorithms and Tables*, Acta Cryst. A 54, 517-531, 1998.
- [Re] Miles Reid, *The Du Val singularities A_n, D_n, E_6, E_7, E_8* , <http://www.maths.warwick.ac.uk/~miles>.
- [Re02] Miles Reid, *La correspondance de McKay*, Astérisque, (276):53-72, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.

[To02] B. Totaro, *Topology of Singular Algebraic Varieties*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), p. 533-541.

[Wi95] Jarosław Wiśniewski, *Lecture notes on Singularities*, UTM LNS 6, 1995.