

AM I.2

X seria zadań

do oddania na początku ćwiczeń 28 maja

1 (Zadanie warte $\frac{1}{2}$ punktu). Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}.$$

2. Niech

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt.$$

(a) Wykazać, że F jest funkcją monotoniczną na $(1, \infty)$.

(b) Obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x).$$

3. Wykazać, że jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$n \int_a^b \left(\int_a^x f(t) dt \right)^{n-1} f(x) dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^n.$$

4. Obliczyć długość wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{1}{2} \left((x+1)\sqrt{2x+x^2} - \ln(\sqrt{2x+x^2} + x + 1) \right), \quad x \in [2, 4].$$

5 (Zadanie warte $\frac{3}{2}$ punktu).

(a) Obliczyć długość krzywej o równaniu $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

(b) Obliczyć pole ograniczone przez tą krzywą.