Analiza matematyczna, 2015/2016
sprawdzian, wersja A

15 grudnia 2015

Zadanie 1

Niech a_n będzie sumą pierwszych n liczb naturalnych parzystych (czyli $a_n = 0 + 2 + \ldots + 2n$).

a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = n^2 + n$.

b) Sprawdź korzystając bezpośrednio z definiicji, że ciąg $b_n = \frac{1}{a_n}$ jest zbieżny do zera.

c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}{3n^2 + 2015 - \sqrt[2015]{n}},$$

odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{16}{\sqrt{-x} - 1} & x \in \text{dla } (-\infty, -4] \\ (-x)^{\sqrt{-x}} & \text{dla } x \in (-4, -1] \\ \dfrac{x^2 - 6x + 7}{-2x - 2} & \text{dla } x \in (-1, \infty) \end{cases}$$

a) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.

b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(1, 2)$.

c) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f. Odpowiedź uzasadnić.

d) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $((-\infty, -4), (-4, -1)$ oraz $(-1, \infty)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach -4 oraz -1. Odpowiedź uzasadnić.

e) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f.

f) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = -9$.

g) Policz $\lim_{x\to-\infty} f(x) \ln x^2$ korzystając z reguły de l'Hospitala.

A