Analiza matematyczna, 2015/2016
sprawdzian – rozwiązania

15 grudnia 2015

Zadanie 1, wersja A

Niech a_n będzie sumą pierwszych n liczb naturalnych parzystych (czyli $a_n = 0 + 2 + \ldots + 2n$).

a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = n^2 + n$.

b) Sprawdź korzystając bezpośrednio z definiicji, że ciąg $b_n = \frac{1}{a_n}$ jest zbieżny do zera.

c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}{3n^2 + 2015 - \sqrt[2015]{n}},$$

odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

a) Rzeczywiście, dla $n = 0$ mamy $a_0 = 0$ – zgadza się.

Załóżmy, że $a_k = k^2 + k$ dla pewnego k, wtedy $a_{k+1} = a_k + 2(k+1) = k^2 + k + 2k + 1 + 1 = (k+1)^2 + (k+1)$. Co dowodzi kroku indukcyjnego. A zatem z zasady indukcji matematycznej mamy, że $a_n = n^2 + n$. □

b) Niech $\varepsilon > 0$. Mam znaleźć $N \in \mathbb{N}$, takie, że dla każdego $n > N$ mamy $|b_n| = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2+n} < \varepsilon$. Zatem wystarczy, że wezmę $N = \left\lceil \frac{1}{vare} \right\rceil$. Wtedy dla $n > N$ mam: $\varepsilon > \frac{1}{n} > \frac{1}{n^2+n}$. □

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}{3n^2 + 2015 - \sqrt[2015]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}{n^2 \left(3 + \frac{2015}{n^2} - n^{\frac{-4029}{2015}}\right)} = \frac{1 \cdot \sqrt{\frac{1}{e}}}{3 + 0 + 0} = \frac{1}{3\sqrt{e}}.$$

Skorzystaliśmy z tego, że ciąg $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$ zbiega do $\sqrt{1}e$, bowiem wiemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e},$$

co udowodniliśmy na ćwiczeniach, korzystając z tego, że $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Zadanie 2, wersja A

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{16}{\sqrt{-x} - 1} & x \in \text{dla } (-\infty, -4] \\ (-x)^{\sqrt{-x}} & \text{dla } x \in (-4, -1] \\ \dfrac{x^2 - 6x + 7}{-2x - 2} & \text{dla } x \in (-1, \infty) \end{cases}$$

a) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.

b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(1,2)$.

c) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f. Odpowiedź uzasadnić.

d) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $((-\infty,-4),(-4,-1)$ oraz $(-1,\infty)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach -4 oraz -1. Odpowiedź uzasadnić.

e) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f.

f) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x=-9$.

g) Policz $\lim_{x\to-\infty} f(x)\ln x^2$ korzystając z reguły de l'Hospitala.

Rozwiązanie

a) Trzeba sprawdzić ciągłość funkcji w punktach -1 i -4. W punkcie $x=-1$ mamy:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)\frac{x^2-6x+7}{-2x-2} = -\infty$$

więc funkcja nie ma szans być ciągła w tym punkcie, natomiast w $x=-4$, mamy

$$f(-4) = \frac{16}{2-1} = 16$$

oraz:

$$\lim_{x\to-4^-} f(x) = \lim_{x\to-4^-} \frac{16}{\sqrt{-x}-1} = 16,$$

a także:

$$\lim_{x\to-4^+} f(x) = \lim_{x\to-4^+} (-x)^{\sqrt{-x}} = \lim_{x\to-4^+} e^{\sqrt{-x}\ln(-x)} = e^{2\ln 4} = 4^2 = 16.$$

A zatem $\lim_{x\to-4} f(x)$ istnieje i jest równa $16 = f(-4)$, czyli funkcja jest ciągła w tym punkcie.

b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(1,2)$.

Zauważam, że:

$$f(2) = \frac{4-12+7}{-4-2} = \frac{-1}{-6} > 0$$

oraz

$$f(1) = \frac{1-6+7}{-2-2} = \frac{2}{-4} < 0$$

Ponieważ mianownik wyrażenia w $f(x)$ ma pierwiastek w -1, to badana funkcja jest ciągła na przedziale $(1,2)$. A zatem z własności Darboux ma na nim pierwiastek.

c) Zaczynamy od asymptot pionowych. Jedyna szansa na to, że dla pewnej skończonej liczby c, $\lim_{x\to c^\pm} f(x) = \pm\infty$, to sytuacja, gdy c jest pierwiastkiem mianownika $-2x-2$ wyrażenia określającego f (widzimy, że pierwiastek wyrażenia $\frac{16}{\sqrt{-x}-1}$ jest poza przedziałem). Widzimy, że $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$, a zatem $x=-1$ jest prawostronną asymptotą pionową. Sprawdźmy asymptoty poziome:

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-6x+7}{-2x-2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x\left(x+x-\frac{7}{x}\right)}{x\left(-2-\frac{2}{x}\right)} = -\infty$, a zatem nie ma prawostronnej asymptoty poziomej.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{16}{\sqrt{-x}-1} = 0$. A zatem mamy asymptotę poziomą lewostronną $y=0$.

Zostaje więc jeszcze opcja na prawostronną asymptotę ukośną. Liczymy:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+7}{-2x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(-2-\frac{2}{x}\right)} = -\frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+7-x^2-x}{-2x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-7x+7}{-2x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-7+\frac{7}{x}\right)}{x\left(-2-\frac{2}{x}\right)} = \frac{7}{2}$$

A zatem prosta $y = ax+b = -\frac{x}{2}+\frac{7}{2}$ jest prawostronną asymptotą ukośną.

d) Jeśli $x \in (-1, \infty)$, to:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 6x + 7}{-2x - 2}\right)' = \frac{(2x-6)(-2x-2) + 2\left(x^2 - 6x + 7\right)}{(-2x-2)^2} = -\frac{x^2 + 2x - 13}{2(x+1)^2}$$

Jeśli natomiast $x \in (-4, -1)$

$$f'(x) = \left((-x)^{\sqrt{-x}}\right)' = \left(e^{\ln(-x)\cdot\sqrt{-x}}\right)' = \left(\ln(-x)\cdot\sqrt{-x}\right)' e^{\ln(-x)\cdot\sqrt{-x}} = -\left(\frac{\sqrt{-x}}{-x} + \frac{\ln(-x)}{2\sqrt{-x}}\right)(-x)^{\sqrt{-x}} =$$

$$= -\frac{2 + \ln(-x)}{2\sqrt{-x}}(-x)^{\sqrt{-x}}.$$

W końcu dla $x \in (-\infty, -4)$:

$$f'(x) = \left(\frac{16}{\sqrt{-x} - 1}\right)' = \frac{\frac{16}{2\sqrt{-x}}}{\left(\sqrt{-x} - 1\right)^2} =$$

$$= \frac{16}{2\sqrt{-x}\left(-x - 2\sqrt{-x} + 1\right)} = \frac{8}{-x\sqrt{-x} - 2x + \sqrt{-x}}$$

(korzystam z tego, że $x < 0$).

Funkcja nie może być różniczkowalna dla $x = -1$, bo nawet nie jest ciągła.

Sprawdzamy dla $x = -4$ licząc granicę prawostronną i lewostronną:

$$\lim_{-4^+} \frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} = -\frac{2 + \ln 4}{4} \cdot 16 = -8 - 4\ln 4,$$

z poprzedniego podpunktu wiemy zaś, że

$$\lim_{-4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x + 4} = \frac{8}{8 - 8 + 2} = 4.$$

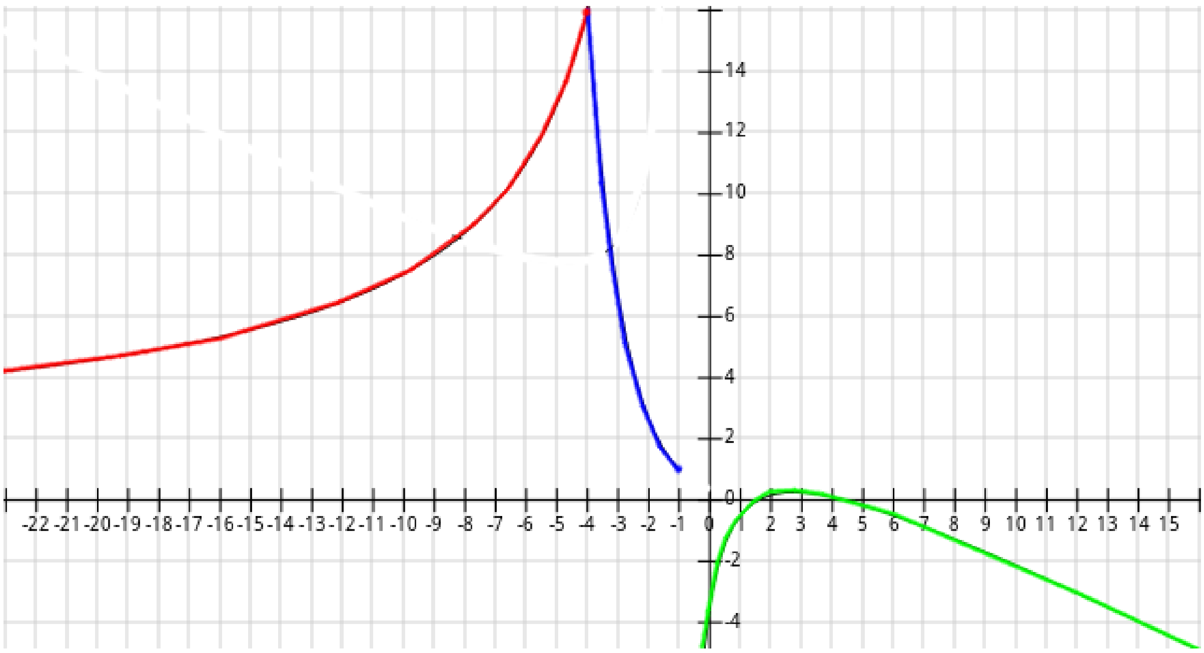
Ponieważ te granice są różne, pochodna nie istnieje.

e) Widać, że jedyna możliwość zerowania się pochodnej, to sytuacja, gdy $x^2 + 2x - 13 = 0$. $\Delta = 4 + 52 = 56$. $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{14}$. Zatem $x_1 = -1 - \sqrt{14}$ oraz $x_2 = -1 + \sqrt{14}$. Ponieważ $x_1 \notin (-1, \infty)$, to interesuje nas tylko x_2. Dodakowo pochodna może zmienić znak dla $x = -1$ i $x = -4$. Mamy więc do rozważenia przedziały:

- $(-\infty, -4)$, $f'(x) > 0$, funkcja rosnąca.
- $(-4, -1)$, $f'(x) < 0$, funkcja malejąca,
- $(-1, -1 + \sqrt{14})$, $f'(x) > 0$, funkcja rosnąca,
- $(-1 + \sqrt{14}, -\infty)$, $f'(x) < 0$, funkcja malejąca,

A zatem mamy dwa lokalne ekstrema: $x = -1 + \sqrt{14}$ to maksimum oraz maksimum w nieróżniczkowalnym miejscu $x = -4$.

A zatem wykres funkcji wygląda mniej więcej tak:



f) Liczymy:

$$f(-9) = \frac{16}{2} = 8$$

$$f'(-9) = \frac{8}{27 - 18 + 3} = \frac{2}{3}$$

A zatem styczna to

$$y = \frac{2}{3}(x+9) + 8 = \frac{2x}{3} + 14.$$

g) Ponieważ $\lim_{x\to-\infty} 16\ln x^2 = \infty = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x} - 1$, możemy zastosować regułę de l'Hostpitala:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{16\ln x^2}{\sqrt{-x}-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{32x}{x^2}}{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{64\sqrt{-x}}{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{64}{\sqrt{-x}} = 0.$$

Zadanie 1, wersja B

Niech a_n będzie sumą pierwszych n liczb naturalnych parzystych (czyli $a_n = 0 + 2 + \ldots + 2n$).

a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = n^2 + n$.

b) Sprawdź korzystając bezpośrednio z definiicji, że ciąg $b_n = \frac{-1}{a_n}$ jest zbieżny do zera.

c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n}{2n^2 - 2015 - \sqrt[2015]{n}},$$

odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

a) Rzeczywiście, dla $n = 0$ mamy $a_0 = 0$ – zgadza się.

Załóżmy, że $a_k = k^2 + k$ dla pewnego k, wtedy $a_{k+1} = a_k + 2(k+1) = k^2 + k + 2k + 1 + 1 = (k+1)^2 + (k+1)$. Co dowodzi kroku indukcyjnego. A zatem z zasady indukcji matematycznej mamy, że $a_n = n^2 + n$. □

b) Niech $\varepsilon > 0$. Mam znaleźć $N \in \mathbb{N}$, takie, że dla każdego $n > N$ mamy $|b_n| = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2+n} < \varepsilon$. Zatem wystarczy, że wezmę $N = \left\lceil \frac{1}{vare} \right\rceil$. Wtedy dla $n > N$ mam: $\varepsilon > \frac{1}{n} > \frac{1}{n^2+n}$. □

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n}{2n^2-2015-\sqrt[2015]{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n}{n^2\left(2-\frac{2015}{n^2}-n^{\frac{-4029}{2015}}\right)} = \frac{1\cdot\frac{1}{e^2}}{2+0+0} = \frac{1}{2e^2}.$$

Skorzystaliśmy z tego, że ciąg $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n$ zbiega do $\sqrt{1}e^2$, bowiem wiemy, że $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$, co udowodniliśmy na ćwiczeniach, korzystając z tego, że $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Zadanie 2, wersja B

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+6x+7}{2x-2} & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ x^{\sqrt{x}} & \text{dla } x \in [1,4) \\ \dfrac{16}{\sqrt{x}-1} & x \in \text{dla } [4,\infty) \end{cases}$$

a) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.

b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(-2,-1)$.

c) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f. Odpowiedź uzasadnić.

d) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $(-\infty,1),(1,4)$ oraz $(4,\infty)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach 1 oraz 4. Odpowiedź uzasadnić.

e) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f.

f) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = 9$.

g) Policz $\lim_{x\to\infty} f(x)\ln x^2$ korzystając z reguły de l'Hospitala.

Rozwiązanie

a) Trzeba sprawdzić ciągłość funkcji w punktach 1 i 4. W punkcie $x = 1$ mamy:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)\frac{x^2+6x+7}{2x-2} = -\infty$$

więc funkcja nie ma szans być ciągła w tym punkcie, natomiast w $x = 4$, mamy

$$f(4) = \frac{16}{2-1} = 16$$

oraz:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}\frac{16}{\sqrt{x}-1} = 16,$$

a także:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4^-} e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{2\ln 4} = 4^2 = 16.$$

A zatem $\lim_{x\to 4} f(x)$ istnieje i jest równa $16 = f(4)$, czyli funkcja jest ciągła w tym punkcie.

b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(-2,-1)$.

Zauważam, że:

$$f(-2) = \frac{4-12+7}{-4-2} = \frac{-1}{-6} > 0$$

oraz

$$f(-1) = \frac{1-6+7}{-2-2} = \frac{2}{-4} < 0$$

Ponieważ mianownik wyrażenia w $f(x)$ ma pierwiastek w 1, to badana funkcja jest ciągła na przedziale $(-2,-1)$. A zatem z własności Darboux ma na nim pierwiastek.

c) Zaczynamy od asymptot pionowych. Jedyna szansa na to, że dla pewnej skończonej liczby c, $\lim_{x\to c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, to sytuacja, gdy c jest pierwiastkiem mianownika $2x-2$ wyrażenia określającego f (widzimy, że pierwiastek wyrażenia $\frac{16}{\sqrt{x}-1}$ jest poza przedziałem). Widzimy, że $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, a zatem $x = 1$ jest lewostronną asymptotą pionową. Sprawdźmy asymptoty poziome:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+6x+7}{2x-2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(x+x+\frac{7}{x}\right)}{x\left(2-\frac{2}{x}\right)} = -\infty$, a zatem nie ma lewostronnej asymptoty poziomej.
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{16}{\sqrt{x}-1} = 0$. A zatem mamy asymptotę poziomą prawostronną $y = 0$.

Zostaje więc jeszcze opcja na lewostronną asymptotę ukośną. Liczymy:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+6x+7}{2x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+6x+7-x^2+x}{2x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7x+7}{2x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(7+\frac{7}{x}\right)}{x\left(2-\frac{2}{x}\right)} = \frac{7}{2}.$$

A zatem prosta $y = ax + b = \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$ jest lewostronną asymptotą ukośną.

d) Jeśli $x \in (-\infty, 1)$, to:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+6x+7}{2x-2}\right)' = \frac{(2x+6)(2x-2) - 2\left(x^2+6x+7\right)}{(2x-2)^2} = \frac{x^2-2x-13}{2(x-1)^2}$$

Jeśli natomiast $x \in (1, 4)$

$$f'(x) = \left(x^{\sqrt{x}}\right)' = \left(e^{\ln x\cdot\sqrt{x}}\right)' = \left(\ln x\cdot\sqrt{x}\right)' e^{\ln x\cdot\sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) x^{\sqrt{x}} = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}}.$$

W końcu dla $x \in (4, \infty)$:

$$f'(x) = \left(\frac{16}{\sqrt{x}-1}\right)' = \frac{\frac{-16}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} =$$

$$= \frac{-16}{2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}+1\right)} = \frac{-8}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$$

(korzystam z tego, że $x > 0$).

Funkcja nie może być różniczkowalna dla $x = 1$, bo nawet nie jest ciągła.

Sprawdzamy dla $x = 4$ licząc granicę prawostronną i lewostronną:

$$\lim_{4^-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{2+\ln 4}{4}\cdot 16 = 8 + 4\ln 4,$$

z poprzedniego podpunktu wiemy zaś, że

$$\lim_{4^+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{-8}{8-8+2} = -4.$$

Ponieważ te granice są różne, pochodna nie istnieje.

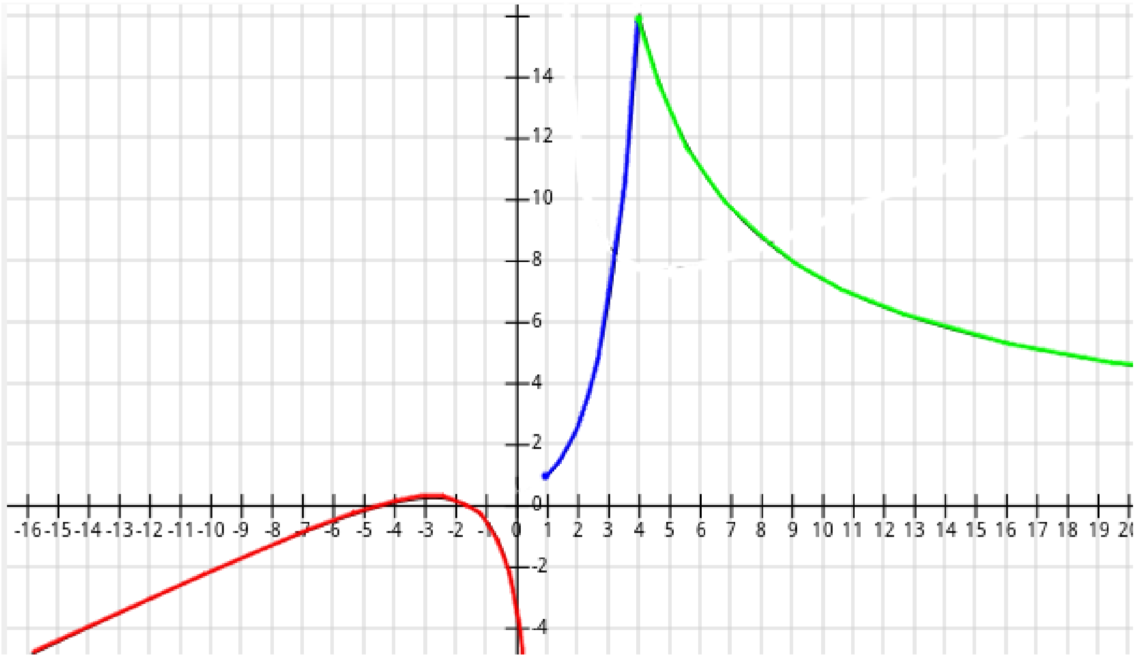
e) Widać, że jedyna możliwość zerowania się pochodnej, to sytuacja, gdy $x^2 - 2x - 13 = 0$. $\Delta = 4 + 52 = 56$. $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{14}$. Zatem $x_1 = 1 - \sqrt{14}$ oraz $x_2 = 1 + \sqrt{14}$. Ponieważ $x_2 \notin (-\infty, 1)$, to interesuje nas tylko x_1. Dodakowo pochodna może zmienić znak dla $x = 1$ i $x = 4$. Mamy więc do rozważenia przedziały:

- $(-\infty, 1-\sqrt{14})$, $f'(x) > 0$, funkcja rosnąca,
- $(1-\sqrt{14}, 1)$, $f'(x) < 0$, funkcja malejąca,
- $(1, 4)$, $f'(x) > 0$, funkcja rosnąca,

- $(4, \infty)$, $f'(x) < 0$, funkcja malejąca.

A zatem mamy dwa lokalne ekstrema: $x = 1 - \sqrt{14}$ to maksimum oraz maksimum w nieróżniczkowalnym miejscu $x = 4$.

A zatem wykres funkcji wygląda mniej więcej tak:



f) Liczymy:

$$f(9) = \frac{16}{2} = 8$$

$$f'(9) = \frac{-8}{27 - 18 + 3} = -\frac{2}{3}$$

A zatem styczna to

$$y = -\frac{2}{3}(x - 9) + 8 = \frac{-2x}{3} + 14.$$

g) Ponieważ $\lim_{x\to\infty} 16 \ln x^2 = \infty = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} - 1$, możemy zastosować regułę de l'Hostpitala:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{16 \ln x^2}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{32x}{x^2}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{64\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{64}{\sqrt{x}} = 0.$$