Analiza matematyczna, 2015/2016
sprawdzian, poprawkowy

25 stycznia 2016

Każdy podpunkt jest wart 1p.

Zadanie 1

Niech $a_n = 2^n$, natomiast f_n będzie ciągiem Fibonacciego, czyli $f_0 = 1, f_1 = 1$ oraz $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $f_n \leq a_n$ dla każdego n.

b) Niech $g_n = \frac{1}{f_n}$. Udowodnij, korzystając bezpośrednio z definicji, że g_n jest ciągiem Cauchy'ego.

c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n + 3n}{n^2 + \sqrt{n}},$$

odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \pi^{\frac{\pi}{x}} & \text{dla } x \in (-\infty, \pi) \setminus \{0\} \\ \dfrac{x^2 + \sin x}{x} & \text{dla } x \in [\pi, \infty) \end{cases}$$

a) Sprawdzić, czy funkcja f jest ciągła w punkcie $x = \pi$. Odpowiedź uzasadnić.

b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f w pewnym punkcie na przedziale $(\pi, 3\pi)$ przyjmuje wartość 2π.

c) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f. Odpowiedź uzasadnić.

d) Obliczyć $f'(x)$ na poszczególnych przedziałach. Zbadać, czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x = \pi$. Odpowiedź uzasadnić.

e) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f.

f) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$.

g) Stosując (wielokrotnie) regułę de l'Hospitala znaleźć

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ln(x)}.$$

Odpowiedź uzasadnić.