

Analiza matematyczna, 2015/2016

sprawdzian, poprawkowy dodatkowy

25 stycznia 2016

Każdy podpunkt jest wart 1p.

Zadanie 1

Niech c_n będzie następującym ciągiem $c_0 = 1, c_1 = 8$ oraz $c_{n+2} = 2c_n + c_{n+1}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

- a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $c_n = 2 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^{n+1}$ dla każdego n .
- b) Niech $d_n = \frac{1}{c_n}$. Udowodnij, korzystając bezpośrednio z definicji, że d_n jest ciągiem Cauchy'ego.
- c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n \left(\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor - \frac{1}{n} \right)}{n^2 + 3^{n+1}},$$

odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \setminus \{-k\pi - \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{N}\} \\ 2x + e^{-x} & \text{dla } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

- a) Sprawdzić, czy funkcja f jest ciągła w punkcie $x = 0$. Odpowiedź uzasadnić.
- b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f w pewnym punkcie na przedziale $(0, 1)$ przyjmuje wartość 2.
- c) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.
- d) Obliczyć $f'(x)$ na poszczególnych przedziałach. Zbadać, czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$. Odpowiedź uzasadnić.
- e) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f .
- f) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = 1$.
- g) Stosując regułę de l'Hospitala znaleźć

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\ln(x) + e^{-x}}.$$

Odpowiedź uzasadnić.