

Analiza matematyczna, 2015/2016

sprawdzian, wersja B

15 grudnia 2015

Zadanie 1

Niech a_n będzie sumą pierwszych n liczb naturalnych parzystych (czyli $a_n = 0 + 2 + \dots + 2n$).

- a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = n^2 + n$.
- b) Sprawdź korzystając bezpośrednio z definicji, że ciąg $b_n = \frac{-1}{a_n}$ jest zbieżny do zera.
- c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 n}{2n^2 - 2015 - \sqrt[2015]{n}},$$

odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x + 7}{2x - 2} & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ x^{\sqrt{x}} & \text{dla } x \in [1, 4) \\ \frac{16}{\sqrt{x} - 1} & \text{dla } x \in [4, \infty) \end{cases}$$

- a) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.
- b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(-2, -1)$.
- c) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.
- d) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $(-\infty, 1)$, $(1, 4)$ oraz $(4, \infty)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach 1 oraz 4. Odpowiedź uzasadnić.
- e) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f .
- f) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = 9$.
- g) Policz $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \ln x^2$ korzystając z reguły de l'Hospitala.

B