

**Metoda dekompozycji obszaru dla
quasiliniowych eliptycznych równań
różniczkowych cząstkowych**

LESZEK MARCINKOWSKI

Praca magisterska

Sierpień 1994

PROMOTOR: PROFESOR MAKSYMILIAN DRYJA

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

1 Wstęp

W pracy rozważamy równoległe algorytmy rozwiązywania układów nieliniowych równań algebraicznych powstałych z dyskretyzacji quasiliniowych równań eliptycznych metodą elementu skończonego. Iteracyjne metody wielopoziomowe należą do najbardziej efektywnych metod rozwiązywania układów równań związanych z dyskretyzacją równań różniczkowych cząstkowych zob. [2, Bank, Rose]. W pracy uogólniamy wielopoziomową metodę rozważaną w [7, 8, Dryja, Widlund],[13, Zhang] dla liniowych równań eliptycznych na zagadnienia nieliniowe. Celem pracy jest przedstawienie dwóch metod oraz analiza ich zbieżności; mianowicie pierwszej powstałej z uogólnienia wielopoziomowej addytywnej metody Schwarza w połączeniu z metodą Richardsona oraz drugiej powstałej z metody Newtona z wewnętrznymi i zewnętrznymi iteracjami. Do wewnętrznych liniowych iteracji użyjemy tu też addytywnej metody Schwarza. W analizie pokażemy, że zbieżność obu metod nie zależy od liczby niewiadomych i liczby poziomów. W pierwszej metodzie, Richardsona, każdą iterację można przeprowadzić równoległe a w drugiej metodzie, Newtona, wszystkie iteracje wewnętrzne można przeprowadzać równoległe. Pierwszy algorytm jest rozszerzeniem algorytmu powstałego z dwupoziomowej addytywnej metody Schwarza opisanej w referacie [3, Cai, Dryja]. Obie metody są optymalne, kiedy rozpatuje się je jako równoległe i sekwencyjne. Jeżeli rozpatrujemy obie metody jako równoległe przy założeniu, że mamy L procesorów, tyle ile poziomów, to speedup czyli stosunek czasu wykonania algorytmu na L procesorach do czasu wykonania na jednym procesorze wynosi L . Komunikacja i synchronizacja są też nieduże i koszt iteracji jest rzędu liczby niewiadomych. Kiedy rozpatrujemy obie metody, jako sekwencyjne to przy odpowiedniej implementacji koszt jednej iteracji też jest rzędu ilości niewiadomych.

W rozdziale 2 przedstawimy zagadnienie różniczkowe oraz założenia przy których ma ono jednoznaczne rozwiązanie. Pokażemy też pewne własności tego zagadnienia. W rozdziale 3 przedstawimy dyskretyzację metodą elementu skończonego oraz pokażemy istnienie rozwiązania układu równań powstałych w wyniku tej dyskretyzacji. Rozważymy tu przypadek dwuwymiarowy i aproksymację na trójkątach kawałkami liniową ciągłą. W tym rozdziale opiszemy też pochodną Gateaux operatora dyskretnego. W rozdziale 4 opiszemy wielopoziomową metodę Schwarza dla równania Poissona oraz implementację preconditionera, który powstaje z tej metody. Paragraf ten ma charakter pomocniczy. W rozdziale 5 przedstawimy metodę

Richardsona w połączeniu z preconditionerem z poprzedniego rozdziału wraz z analizą zbieżności i implementacją. W rozdziale 6 przedstawimy metodę Newtona z zewnętrznymi i wewnętrznymi iteracjami z zastosowaniem preconditionera z rozdziału 4, wraz z analizą zbieżności porównaj [9, D'yakonov]. Na koniec w rozdziale 7 przedstawimy wyniki kilku numerycznych eksperymentów związanych z przedstawionymi wcześniej algorytmami. Liczba iteracji potrzebnych, aby błąd residualny był mniejszy od błędu początkowego pomnożonego przez ustalony czynnik np. (10^{-4}) nie zależy od liczby niewiadomych i poziomów potwierdzając rezultaty teoretyczne zawarte w pracy.

2 Zagadnienie różniczkowe

W tej części sformułujemy zagadnienie różniczkowe, którym się zajmujemy oraz przedstawimy pewne jego własności.

Klasyczne sformułowanie problemu różniczkowego jest następujące:

$$Lu = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f(x) \quad x \in \Omega \subset R^2 \quad (1)$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega$$

gdzie $\nabla u = (\frac{\partial}{\partial x_1} u, \frac{\partial}{\partial x_2} u)^T$

Będzie nas interesowało słabe sformułowanie tego zagadnienia.

Wyznaczyć $u \in H_0^1(\Omega)$ takie, że

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2)$$

gdzie

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 a_i(x, u, \nabla u) \cdot D_i v + a_0(x, u, \nabla u) v \, dx$$

$$f(v) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{dla } f \in L^2(\Omega).$$

Tutaj $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Ω jest ograniczonym obszarem zawartym w R^2 o Lipschitzowskim brzegu, $L^2(\Omega)$ - przestrzeń funkcji całkowalnych w kwadracie.

$$\text{z normą } \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f^2 \, dx$$

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D_i f \in L^2(\Omega) \, i = 1, 2\}$$

$$\text{z normą } \|f\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} (f^2 + (\nabla f)^2) \, dx$$

$H_0^1(\Omega)$ - podprzestrzeń funkcji z $H^1(\Omega)$ z zerowymi śladami na brzegu.

Definiuje się też przestrzeń $H_0^1(\Omega)$ jako domknięcie $C_0^\infty(\Omega)$ w $H^1(\Omega)$.

Założymy eliptyczność $a(u, v)$ jak w [10] tzn. \exists funkcje ν i μ ograniczone i dodatnie takie, że

$$\forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2, \xi \neq 0, \forall p' = (p_0, p_1, p_2) \in R^3, \forall x \in \Omega$$

$$\nu(p') \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial p_j} a_i(x, p') \xi_i \xi_j \leq \mu(p') \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \quad (3)$$

Założymy, że forma (2) ma ograniczoną nieliniowość jak w [10]

$$a_i \in C^1(\Omega \times R^3), \quad i = 0, 1, 2 \quad (4)$$

$$\nu(p') \geq \nu > 0 \quad i \quad \mu(p') \leq \mu \quad (5)$$

$$\max_{\bar{\Omega}, 0 \leq i, j \leq 2, 1 \leq k \leq 2} \{ |a_i(x, 0, 0)|, |\frac{\partial a_i}{\partial x_k}|, |\frac{\partial a_i}{\partial p_j}|, \} \leq M \quad (6)$$

Definicja 1 Forma $a(u, v) : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow R$ spełnia warunek **silnej monotoniczności** jeśli

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall u, v \in H_0^1 \quad a(u, u - v) - a(v, u - v) \geq \gamma \|u - v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (7)$$

Uwaga 2.1 Z silnej monotoniczności wynika jednoznaczność rozwiązania.

Definicja 2 Forma $a(u, v) : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow R$ spełnia warunek **silnej eliptryczności** jeśli

$$\exists \mu_0 > 0, \quad \forall \xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in R^3, \quad \xi \neq 0, \quad \forall p' = (p_0, p_1, p_2) \in R^3$$

$$\forall x \in \bar{\Omega} \quad \sum_{i,j=0}^2 \frac{\partial}{\partial p_j} a_i(x, p') \xi_i \xi_j \geq \mu_0 \sum_{i=0}^2 \xi_i^2 \quad (8)$$

W dwóch kolejnych lematkach (np. [6]) przedstawione są własności formy (2):

Lemat 2.1 Przy założeniu silnej eliptryczności forma $a(u, v) : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow R$ jest silnie monotoniczna.

Dowód:

Skorzystajmy z tego, że dla $u, v \in H_0^1(\Omega)$ w punkcie x :

$$a_i(x, v, \nabla v) - a_i(x, u, \nabla u) = \int_0^1 \frac{d}{dt} a_i(x, (1-t)u + tv, (1-t)\nabla u + t\nabla v) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial p_j} a_i(x, (1-t)u + tv, (1-t)\nabla u + t\nabla v) \frac{\partial}{\partial x_j} (v-u) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial p_0} a_i(x, (1-t)u + tv, (1-t)\nabla u + t\nabla v) (v-u) \right\} dt
\end{aligned}$$

wtedy

$$\begin{aligned}
a(v, v-u) - a(u, v-u) &= \int_{\Omega} \int_0^1 \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial p_j} a_i(x, q') \frac{\partial}{\partial x_j} (v-u) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) + \\
&\quad \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial p_0} a_i(x, q') (v-u) \frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial p_j} a_0(x, q') \frac{\partial}{\partial x_j} (v-u) (v-u) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial p_0} a_0(x, q') (v-u)^2 dt dx
\end{aligned}$$

gdzie $q' = (q_0, q_1, q_2)$ dla $q_0 = (1-t)u + tv$, $q_i = (1-t)\frac{\partial}{\partial x_i} u + t\frac{\partial}{\partial x_i} v$ $i = 1, 2$; zatem korzystając z silnej eliptyczności mamy

$$a(v, v-u) - a(u, v-u) \geq \mu_0 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (v-u) \right)^2 + (v-u)^2 dx = \mu_0 \|u-v\|_{H^1}^2 \square$$

Następny lemat określa kolejną własność formy $a(\cdot, \cdot)$, por. [6]

Lemat 2.2 *Jeśli $a(u, v) : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow R$ ma ograniczoną nieliniowość, to znaczy jeśli spełniony jest warunek (6), to*

$$\exists \widehat{M} > 0 \quad \forall u, v, w \in H_0^1 \quad |a(u, w) - a(v, w)| \leq \widehat{M} \|u-v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \quad (9)$$

Dowód:

Analogicznie jak w dowodzie poprzedniego lematu otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
|a(v, w) - a(u, w)| &\leq \int_{\Omega} \int_0^1 \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial}{\partial p_j} a_i(x, q') \right| \left| \frac{\partial}{\partial x_j} (v-u) \right| \left| \frac{\partial}{\partial x_i} w \right| \\
&+ \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial}{\partial p_0} a_i(x, q') \right| |v-u| \left| \frac{\partial}{\partial x_i} w \right| + \sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial}{\partial p_j} a_0(x, q') \right| \left| \frac{\partial}{\partial x_j} (v-u) \right| \cdot |w| \\
&\quad + \left| \frac{\partial}{\partial p_0} a_0(x, q') \right| |v-u| |w| dt dx
\end{aligned}$$

gdzie $q' = (q_0, q_1, q_2)$ dla $q_0 = (1-t)u + tv$, $q_i = (1-t)\frac{\partial}{\partial x_i}u + t\frac{\partial}{\partial x_i}v$ $i = 1, 2$;
zatem korzystając z (6) i nierówności Schwarz'a otrzymamy:

$$|a(v, w) - a(u, w)| \leq M \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial}{\partial x_j}(v-u) \right| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x_i}w \right| + \sum_{i=1}^2 |v-u| \left| \frac{\partial}{\partial x_i}w \right| +$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial}{\partial x_j}(v-u) \right| \cdot |w| + |(v-u)| \cdot |w| dx \leq \widehat{M} \|v-u\|_{H^1} \|w\|_{H^1}$$

□

Twierdzenie 2.1 *Przy założeniach silnej monotoniczności i (9) istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (2).*

Dowód można znaleźć np. w [5] lub [10, str.354-360] □

3 Metoda elementu skończonego

W tym rozdziale sformułujemy zadanie przybliżone dla zagadnienia (2), którego rozwiązanie będziemy chcieli znaleźć numerycznie. Przedstawimy w nim również, jak działa pochodna Gateaux nieliniowego operatora, który powstanie po dyskretyzacji problemu wyjściowego. Własności i postać pochodnej Gateaux będą wykorzystane w dalszej części pracy w analizie metody Newtona.

3.1 Przestrzeń elementu skończonego

Niech Ω będzie obszarem o kształcie wielokąta. Definiujemy ciąg zagnieżdżonych triangulacji $\{\mathcal{T}^l\}_{l=1}^L$. Zaczynamy od triangulacji $\mathcal{T}^1 = \{\tau_{i=1}^1\}_{i=1}^{N_1}$ gdzie τ_i^1 reprezentuje pojedynczy trójkąt. Następnie drobniejsze triangulacje $\mathcal{T}^l = \{\tau_{i=1}^l\}_{i=1}^{N_l}$ są zdefiniowane poprzez podział pojedynczych trójkątów w zbiorze \mathcal{T}^{l-1} na kilka trójkątów. Zakładamy, że wszystkie triangulacje są regularne, co oznacza że dla każdego trójkąta stosunek średnicy okręgu opisanego na trójkącie do promienia okręgu wpisanego jest większy od pewnej stałej, która nie zależy od kolejnych triangulacji. Niech $h_i^l = \text{diam}(\tau_i^l)$ $h_l = \max_i h_i^l$ i $h = h_L$. Załóżmy, że każdy z trójkątów triangulacji \mathcal{T}^{l-1} dzielimy na cztery trójkąty, tak aby $\frac{h_{k+i}}{h_k} \leq C2^{-i}$ i $h_k = 2^{-k} \cdot h_0$

Niech V^l , $l = 1, \dots, L$ będą przestrzeniami funkcji kawałkami liniowymi, ciągłymi i znikającymi na $\partial\Omega$ związanymi z triangulacją \mathcal{T}^l odpowiednio. Wtedy każda V^l posiada standardową bazę nodalną związaną z węzłami triangulacji \mathcal{T}^l i $V^l = \text{span}\{\varphi_i^l\}$ gdzie $i = 1, \dots, N_l$. W szczególności $V^h = V^L = \text{span}\{\varphi_i^L\}$ dla $i = 1, \dots, N_h$. Przestrzenie V^l , $i = 1, \dots, L$ mają charakter pomocniczy i będą wykorzystane w dalszej części pracy.

Oznaczmy przez \underline{u} wektor współrzędnych u_h w standardowej bazie V^h tzn $\underline{u} = \{u_i\}_{i=1, \dots, N_h}$ dla $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i^L$, $u_i = u(x_i^L)$ dla x_i^L - punktów nodalnych. Zauważmy, że operacja J_L :

$$J_L(u_h) = \underline{u} \tag{10}$$

jest liniowym izomorfizmem przestrzeni V^h i R^{N_h} . Analogicznie można przyporządkować $J_l : V^l \rightarrow R^{N_l}$ korzystając z tego, że $V^l = \text{span}\{\varphi_i^l\}$.

3.2 Zagadnienie dyskretne

Problem dyskretny:

Znaleźć $u_h \in V^L = V^h$ takie, że

$$\forall v_h \in V^h \quad a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad (11)$$

Używając bazy nodalnej, czyli standardowej związanej z węzłami triangulacji, możemy ten problem przepisać jako układ nieliniowych równań algebraicznych

$$A(\underline{u}) = \underline{f} \quad (12)$$

gdzie

$$\underline{f} = \{f(\varphi_i^L)\}_{1, \dots, N_h} \quad \underline{u} = \{u_i\}_{1, \dots, N_h} \quad \text{dla} \quad u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i^L, \quad u_i = u(x_i^L)$$

x_i^L - punkt nodalny czyli wierzchołki trójkątów triangulacji \mathcal{T}^L leżące wewnątrz obszaru Ω .

Zauważmy, że wtedy

$$(A(\underline{u}), \underline{v})_{R^{N_h}} = a(u_h, v_h) \quad \text{i} \quad (\underline{f}, \underline{v})_{R^{N_h}} = f(v_h)$$

$$\text{dla} \quad (\underline{u}, \underline{v})_{R^{N_h}} = \sum_{i=1}^{N_h} u_i v_i$$

Istnienie rozwiązania (11) (i również (12)) wynika z następującego lematu, którego dowód jest zawarty w np. (J.L.Lions) [11]

Niech $K(0, r) = \{v \in H : \|v\|_H \leq r\} \subset H$ dla przestrzeni Hilberta H .

Lemat 3.1 (o kącie ostrym) *Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $[\cdot, \cdot]$, niech P będzie ciągłą funkcją z $K(0, r)$ w H oraz niech*

$$\forall \xi \in H \quad [\xi, \xi] = r^2 : \quad [P(\xi), \xi] \geq 0.$$

Wtedy $\exists \xi \in K(0, r)$ takie, że

$$P(\xi) = 0$$

Uwaga 3.1 *Jeżeli zamiast V^h w (11) weźmiemy dowolną podprzestrzeń skończenie wymiarową $H_0^1(\Omega)$ to dowód poniższego lematu jest też prawdziwy.*

Z powyższego lematu wynika

Lemat 3.2 *Układ (12) a tym samym problem (11) ma jednoznaczne rozwiązanie.*

Dowód:

Jednoznaczność wynika z silnej monotoniczności $a(\cdot, \cdot)$ tzn. jeśli \underline{u} i \underline{v} są rozwiązaniami (12), to

$$\begin{aligned} \gamma \|u_h - v_h\|_{H^1}^2 &\leq a(u_h, u_h - v_h) - a(v_h, u_h - v_h) = \\ &= (A(\underline{u}), \underline{u} - \underline{v})_{R^{N_h}} - (A(\underline{v}), \underline{u} - \underline{v})_{R^{N_h}} = 0 \end{aligned}$$

Zdefiniujmy operator D :

$$(D\underline{u}, \underline{v})_{R^{N_h}} := (\underline{u}, \underline{v})_D := (u_h, v_h)_{H^1} \quad (13)$$

$$\text{dla } u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i^L \text{ i } v_h = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i^L$$

Oczywiście D jest dodatnio określonym i samosprężonym operatorem w R^{N_h} i wtedy R^{N_h} z $(\cdot, \cdot)_D$ jest skończenie wymiarową przestrzenią Hilberta. Niech $P(\underline{u}) = D^{-1}(A(\underline{u}) - \underline{f})$ zauważmy, że na podstawie (6)

$$\begin{aligned} |(A(0), \underline{u})_{R^{N_h}}| &= \left| \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 a_i(x, 0, 0) \cdot D_i u + a_0(x, 0, 0) u \right) dx \right| \leq \\ &\leq M \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 |D_i u| + |u| \right) dx \leq M\sqrt{3} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 |D_i u|^2 + |u|^2 \right)^{1/2} dx \leq \\ &M\sqrt{3} \text{meas}(\Omega)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 |D_i u|^2 + |u|^2 dx \right)^{1/2} = c \|u_h\|_{H^1} = c \|\underline{u}\|_D \end{aligned}$$

dla stałej $c > 0$. Ponadto

$$|(\underline{f}, \underline{u})_{R^{N_h}}| \leq \|f\|_{L^2} \|u_h\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\underline{u}\|_D$$

Zatem

$$\begin{aligned} |(A(0) - \underline{f}, \underline{u})_{R^{N_h}}| &\leq |(A(0), \underline{u})_{R^{N_h}}| + |(\underline{f}, \underline{u})_{R^{N_h}}| \leq \\ &\leq (c + \|f\|_{L^2}) \|\underline{u}\|_D = \delta \cdot \|\underline{u}\|_D \end{aligned}$$

i wtedy

$$(P(\underline{u}), \underline{u})_D = (A(\underline{u}) - A(0), \underline{u})_{R^{N_h}} - (-A(0) + \underline{f}, \underline{u})_{R^{N_h}} \geq \gamma \|\underline{u}\|_D^2 - \delta \|\underline{u}\|_D$$

zatem biorąc r takie, że $\gamma r - \delta \geq 0$ mamy, że

$$\forall \underline{u} : \|\underline{u}\|_D = r; (P(\underline{u}), \underline{u})_D \geq 0$$

$P(\underline{u})$ jest ciągle, wynika to z (9). (Co więcej można nawet pokazać, że $P(\underline{u})$ spełnia warunek Lipschitza).

Z poprzedniego lematu wynika, że

$$\exists \underline{u} \in K_D(0, r) \quad P(\underline{u}) = 0$$

co oznacza, że $A(\underline{u}) = \underline{f}$ i to w połączeniu z jednoznacznością pokazaną na początku dowodu pokazuje istnienie rozwiązania (11) w V^h . \square

3.3 Pochodna Gateaux operatora i jej własności

Operator A z (12) ma przy założeniu silnej ograniczoności tj. warunku (6) pochodną Gateaux A' , która ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V^h \quad (A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{w})_{R^{N_h}} = s(u_h; v_h, w_h) = \\ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial p_j} a_i(x, u_h, \nabla u_h) \frac{\partial}{\partial x_j} v_h \frac{\partial}{\partial x_i} w_h + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial p_j} a_0(x, u_h, \nabla u_h) \frac{\partial}{\partial x_j} v_h w_h \quad (14) \\ + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial p_0} a_i(x, u_h, \nabla u_h) v_h \frac{\partial}{\partial x_i} w_h + \frac{\partial}{\partial p_0} a_0(x, u_h, \nabla u_h) v_h w_h \, dx \end{aligned}$$

Zauważmy, że forma $s(u_h; v_h, w_h)$ jest dwuliniowa ze względu na v_h i w_h .

Uwaga 3.2 Jeśli dla $u_h \in V^h$ i $x \in \bar{\Omega}$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} a_i(x, u_h(x), \nabla u_h(x)) = \frac{\partial}{\partial p_i} a_j(x, u_h(x), \nabla u_h(x)) \quad \text{dla } i, j = 0, 1, 2$$

to forma $s(u_h; \cdot, \cdot)$ będzie symetryczna, co w szczególności da, że $A'(\underline{u})$ będzie samosprężony w R^{N_h} .

Oczywiście, przy założeniach silnej eliptyczności mamy, że liniowy operator $A'(\underline{u})$ jest R^{N_h} - eliptyczny z normą energetyczną dla D z (13), co oznacza $\forall \underline{u} \in R^{N_h}$ z tą samą stałą

$$\exists \gamma > 0 \forall \underline{u}, \underline{v} \in R^{N_h} \quad (A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{v}) \geq \gamma \|\underline{v}\|_D^2 = \gamma \|v_h\|_{H^1}^2 \quad (15)$$

Ponadto mamy także jednostajną ograniczoność $A'(\underline{u})$ z warunku (6) : $\forall \underline{u} \in R^{N_h}$ co oznacza

$$\exists M > 0 \forall u, v, w \in V^h \quad |(A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{w})| \leq M \|\underline{v}\|_D \|\underline{w}\|_D = M \|v_h\|_{H^1} \|w_h\|_{H^1} \quad (16)$$

4 Addytywna wielopoziomowa metoda Schwarz'a dla równania Poissona

W tej części pokażemy konstrukcję preconditionera \widehat{B}^{-1} dla równania (12). Ten preconditioner został skonstruowany jako addytywna metoda Schwarz'a w pracach [8, Dryja, Widlund] oraz [13, Zhang] dla równania Poissona w jego słabym sformułowaniu tzn dla problemu

Znaleźć $u \in H_0^1(\Omega)$ takie, że:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad b(u, v) = f(v)$$

$$\text{dla } b(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{i} \quad f(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

gdzie $f \in L^2(\Omega)$. Po dyskretyzacji powstaje problem
Znaleźć $u_h \in V^h$ takie, że

$$\forall v_h \in V^h \quad b(u_h, v_h) = f(v_h) \tag{17}$$

Zdefiniujmy operator $B : R^{N_h} \rightarrow R^{N_h}$

$$(B\underline{u}, \underline{v})_{R^{N_h}} = b(u_h, v_h)$$

gdzie \underline{u} jest reprezentacją wektorową funkcji u_h .

Zdefiniujemy teraz rozbitcie przestrzeni V^l , $l = 1, \dots, L$, $V_1^1 = V^1$, $V_i^l = \text{span}\{\varphi_i^l\}$, gdzie $i = 1, \dots, N_l$, $l = 2, \dots, L$ oraz $V^l = \text{span}\{\varphi_1^l, \dots, \varphi_{N_l}^l\}$. Z konstrukcji triangulacji wynika, że $V^l \subset V^L$, $\forall l < L$ więc przestrzeń elementu skończonego $V^h = V^L$ reprezentuje suma

$$V^h = \sum_{l=1}^L V^l = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{N_l} V_i^l$$

Z nierówności Friedrichsa wynika, że w V^h

$$b(\cdot, \cdot) \leq \|\cdot\|_{H^1}^2 \leq M b(\cdot, \cdot)$$

Stała M zależy tylko od średnicy obszaru Ω .

Jeżeli oznaczymy przez $\tilde{V}_i^l = J_L(V_i^l) \subset R^{N_h}$ i odpowiednio $\tilde{V}^l = J_L(V^l)$, to z liniowości J_L z (10) otrzymamy:

$$R^{N_h} = \sum_{l=1}^L \tilde{V}^l = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{N_l} \tilde{V}_i^l$$

Definiujemy $P_{V_i^l} : R^{N_h} \rightarrow \tilde{V}_i^l$, $Q_{V_i^l} : R^{N_h} \rightarrow \tilde{V}_i^l$ oraz operatory $B_{V_i^l} : \tilde{V}_i^l \rightarrow \tilde{V}_i^l$ jak następuje

$$\begin{aligned} (B_1 \underline{u}, \underline{v})_{R^{N_h}} &= (\underline{u}, \underline{v})_B \quad \underline{u} \in \tilde{V}^1 \quad \forall \underline{v} \in \tilde{V}^1 \\ (B_{V_i^l} \underline{u}, \underline{v})_{R^{N_h}} &= (\underline{u}, \underline{v})_B \quad \underline{u} \in \tilde{V}_i^l \quad \underline{v} \in \tilde{V}_i^l \\ (P_{V_i^l} \underline{u}, \underline{v})_B &= (\underline{u}, \underline{v})_B \quad \forall \underline{v} \in \tilde{V}_i^l \\ (Q_{V_i^l} \underline{u}, \underline{v})_{R^{N_h}} &= (\underline{u}, \underline{v})_{R^{N_h}} \quad \forall \underline{v} \in \tilde{V}_i^l \end{aligned}$$

Ponieważ \tilde{V}_i^l dla $l > 1$ są jednowymiarowe więc rzut $P_{V_i^l} \underline{u} = s(\underline{u}) J_L(\varphi_i^l)$, gdzie $s(\underline{u})$ jest skalarom a $J_L(\varphi_i^l)$ wektorem, który jako składowe ma współrzędne funkcji φ_i^l w bazie $span(\varphi_i^l)$, $i = 1, \dots, N_h$. Zatem rzut $P_{V_i^l}$ ma postać:

$$P_{V_i^l} \underline{u} = \frac{1}{b(\varphi_i^l, \varphi_i^l)} b(u_h, \varphi_i^l) J_L(\varphi_i^l) = B_{V_i^l}^{-1} Q_{V_i^l} B \underline{u} \quad \text{dla } l = 2, \dots, L \quad i = 1, \dots, N_l \quad (18)$$

ponieważ

$$\begin{aligned} s(\underline{u}) b(\varphi_i^l, \varphi_i^l) &= s(\underline{u}) (J_L(\varphi_i^l), J_L(\varphi_i^l))_B = (P_{V_i^l} \underline{u}, J_L(\varphi_i^l))_B = \\ &= (\underline{u}, J_L(\varphi_i^l))_B = b(u_h, \varphi_i^l) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (B_{V_i^l} P_{V_i^l} \underline{u}, J_L(\varphi_i^l))_{R^{N_h}} &= (P_{V_i^l} \underline{u}, J_L(\varphi_i^l))_B = \\ &= (\underline{u}, J_L(\varphi_i^l))_B = (Q_{V_i^l} B \underline{u}, J_L(\varphi_i^l))_{R^{N_h}} \end{aligned}$$

a dla $l=1$ mamy

$$P_{V_1} \underline{u} = B_1^{-1} Q_{V_1} B \underline{u}$$

Niech

$$P_{MAS} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{N_l} P_{V_i^l} = \left(\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{N_l} B_{V_i^l}^{-1} Q_{V_i^l} \right) B = (\hat{B})^{-1} B \quad (19)$$

Lemat 4.1 \hat{B}^{-1} jest samosprężony w R^{N_h} .

Dowód:

Teza lematu wynika z samosprężoności $P_{V_i^l}$ w $(\cdot, \cdot)_B$. Niech $\underline{u}, \underline{v} \in R^{N_h}$. Wtedy istnieją $\underline{w}, \underline{z} \in R^{N_h}$ takie że $\underline{u} = B \underline{w}$ i $\underline{v} = B \underline{z}$ i mamy

$$(B_{V_i^l}^{-1} Q_{V_i^l} \underline{u}, \underline{v})_{R^{N_h}} = (B_{V_i^l}^{-1} Q_{V_i^l} B \underline{w}, B \underline{z})_{R^{N_h}} =$$

$$\begin{aligned}
& (BB_{V_i}^{-1}Q_{V_i}B\underline{w}, \underline{z})_{R^{N_h}} = (P_{V_i}\underline{w}, \underline{z})_B \\
& = (\underline{w}, P_{V_i}\underline{z})_B = (B\underline{w}, B_{V_i}^{-1}Q_{V_i}B\underline{z})_{R^{N_h}} = (\underline{u}, B_{V_i}^{-1}Q_{V_i}\underline{u})_{R^{N_h}}
\end{aligned}$$

Zatem \widehat{B}^{-1} jako suma $B_{V_i}^{-1}Q_{V_i}$ też jest samosprężony. \square

W pracy [13, Zhang] udowodniono twierdzenie

Twierdzenie 4.1 *Dla \widehat{B}^{-1} zdefiniowanego jak wyżej i operatora $P_{MAS} = (\widehat{B})^{-1}B$ zachodzi*

$$\exists c_1, c_2 > 0 \forall \underline{u} \in R^{N_h} \quad c_1(\underline{u}, \underline{u})_B \leq (P_{MAS}\underline{u}, \underline{u})_B \leq c_2(\underline{u}, \underline{u})_B$$

Obie stałe są niezależne od $\{h_l\}$ i L . \square

Definicja 3 *Niech A i B liniowe i samosprężone. Powiemy, że A i B są spektralnie równoważne, $A \sim B$ jeśli*

$$\exists c, C > 0 \forall \underline{u} \in R^{N_h} \quad c(A\underline{u}, \underline{u})_{R^{N_h}} \leq (B\underline{u}, \underline{u})_{R^{N_h}} \leq C(A\underline{u}, \underline{u})_{R^{N_h}}$$

Obie stałe c, C są niezależne od N_h .

Z twierdzenia 4.1 wynika wniosek:

Wniosek 1 *Dla \widehat{B} zdefiniowanego w (19) otrzymujemy, że*

$$B \sim B(\widehat{B})^{-1}B$$

Z tego wniosku wynika następujący lemat:

Lemat 4.2 *Dla \widehat{B} zdefiniowanego w (19) otrzymujemy, że*

$$(\widehat{B})^{-1} \sim B^{-1}$$

Dowód:

Biorąc $\underline{u} \in R^{N_h}$ oraz $B\underline{w} = \underline{u}$ mamy, że

$$((\widehat{B})^{-1}\underline{u}, \underline{u})_{R^{N_h}} = ((\widehat{B})^{-1}B\underline{w}, B\underline{w})_{R^{N_h}} =$$

$$\begin{aligned}
&= (B(\widehat{B})^{-1}B\underline{w}, \underline{w})_{R^{N_h}} \leq c_2(B\underline{w}, \underline{w})_{R^{N_h}} = \\
&= c_2(BB^{-1}B\underline{w}, \underline{w})_{R^{N_h}} = c_2(B^{-1}B\underline{w}, B\underline{w})_{R^{N_h}} = c_2(B^{-1}\underline{u}, \underline{u})_{R^{N_h}}
\end{aligned}$$

i analogicznie $((\widehat{B})^{-1}\underline{u}, \underline{u})_{R^{N_h}} \geq c_1(B^{-1}\underline{u}, \underline{u})_{R^{N_h}} \square$

Poniższy lemat jest dobrze znanym faktem z analizy funkcjonalnej:

Lemat 4.3 *Niech A, B liniowe, $A = A^* > 0$ i $B = B^* > 0$ w przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym (\cdot, \cdot) . Wtedy jeśli*

$$A \sim B, \quad \text{to} \quad A^{-1} \sim B^{-1}$$

Dowód:

Skorzystamy z tego, że dla $B = B^* > 0$ istnieje $B^{1/2}$ ($B = B^{1/2}B^{1/2}$), który jest samosprzężony i $B^{1/2} > 0$. Pokażemy, że $C = B^{-1/2}AB^{-1/2} \sim I$, bowiem biorąc $u = B^{-1/2}w$ mamy

$$\begin{aligned}
(B^{-1/2}AB^{-1/2}w, w) &= (AB^{-1/2}w, B^{-1/2}w) = (Au, u) \leq \\
&\leq c(Bu, u) = c(BB^{-1/2}w, B^{-1/2}w) = c(w, w) \quad \forall w \in H
\end{aligned}$$

Nierówność w drugą stronę dowodzimy analogicznie. Oczywiście tak zdefiniowane $C = C^* > 0$, zatem istnieje $C^{1/2}$, więc biorąc $w = C^{1/2}u$

$$\begin{aligned}
c(C^{-1}w, w) &= c(C^{-1}C^{1/2}u, C^{1/2}u) = c(u, u) \geq (Cu, u) = \\
&= (C^{1/2}u, C^{1/2}u) = (w, w)
\end{aligned}$$

odwrotna nierówność uzyskujemy analogicznie. Zatem $C^{-1} \sim I$ a to znaczy, że $B^{1/2}A^{-1}B^{1/2} \sim I$. Teraz biorąc $u = B^{1/2}w$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
(A^{-1}u, u) &= (A^{-1}B^{1/2}w, B^{1/2}w) = (B^{1/2}A^{-1}B^{1/2}w, w) \\
&\leq c(w, w) = c(B^{-1/2}u, B^{-1/2}u) = c(Bu, u)
\end{aligned}$$

odwrotna nierówność otrzymujemy analogicznie, a to dowodzi, że $A^{-1} \sim B^{-1}$. \square

Z dwóch ostatnich lematów wynika wniosek

Wniosek 2 *Dla \widehat{B} z (19) otrzymujemy, że*

$$\widehat{B} \sim B$$

Zatem normy $\|\underline{u}\|_{\hat{B}} \sim \|\underline{u}\|_B = b^{1/2}(u_h, u_h) \sim \|u_h\|_{H^1} \quad \forall u_h \in V^h$.

Niech K_l będzie macierzą sztywności określoną w R^{N_l} odpowiednio i $D_l = \text{diag}(K_l)$, tzn.:

$$K_l = \{b(\varphi_i^l, \varphi_j^l)\}_{j,i=1,\dots,N_l} \quad \text{dla } V^l = \text{Span}\{\varphi_i^l\}_{i=1,\dots,N_l}$$

wtedy $K_L = B$ i Niech $\Pi_l : R^{N_l} \rightarrow R^{N_h}$, ($l \leq L$) będzie standardową macierzą interpolacji i $\Pi_l^t : R^{N_h} \rightarrow R^{N_l}$ będzie macierzą transponowaną do Π_l . Wówczas \hat{B}^{-1} można przedstawić jako

$$\hat{B}^{-1} = \Pi_1 K_1^{-1} \Pi_1^t + \dots + \Pi_l D_l^{-1} \Pi_l^t + \dots + \Pi_{L-1} D_{L-1}^{-1} \Pi_{L-1}^t + D_L^{-1}$$

Zauważmy, że policzenie $\hat{B}^{-1}\underline{u}$ dla dowolnego wektora $\underline{u} \in V^h$ wymaga rozwiązania L niezależnych problemów i można to zrobić równoległe. Koszt wyznaczenia każdego elementu $\Pi_l D_l^{-1} \Pi_l^t$ jest rzędu N_h ponieważ trzeba przemnożyć przez macierze Π_l , Π_l^t oraz diagonalną macierz D_l^{-1} . Równocześnie, gdybyśmy wyznaczeni \hat{B}^{-1} sekwencyjnie, to możemy interpolować z sąsiadujących poziomów tzn z V^{l-1} na V^l i z V^l na V^{l-1} . Zamiast wyznaczać kolejne człony $\hat{B}^{-1}\underline{u}$ niezależnie, czyli kolejno liczyć $\Pi_l D_l^{-1} \Pi_l^t \underline{u}$ sumując na końcu, możemy policzyć $\Pi_{L-1}^t \underline{u}$ interpolując $\Pi_L^t \underline{u}$ na poziom $L-1$, a następnie przejść na poziom $L-2$ i tak dalej. Analogicznie, gdy wyznaczyliśmy $D_l^{-1} \Pi_l^t \underline{u}$ to zamiast interpolować bezpośrednio na L -ty poziom przechodzimy na $l+1$ poziom i dodajemy do $D_{l+1}^{-1} \Pi_{l+1}^t \underline{u}$ i przechodzimy na poziom $l+2$. Koszt policzenia \hat{B}^{-1} wtedy jest liniowy, tzn. rzędu N_h .

5 Metoda iteracyjna Richardsona

W tym rozdziale przedstawimy metodę iteracyjną rozwiązywania problemu (12) z wykorzystaniem \hat{B}^{-1} opisanego w poprzednim rozdziale. Metoda ta jest uogólnieniem dwupoziomowej Addytywnej Metody Schwarza opisanej w referacie [3, Cai,Dryja].

5.1 Opis metody

Do rozwiązania układu (12) zastosujemy metodę iteracyjną Richardsona postaci:

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n - \tau \hat{B}^{-1}(A(\underline{u}^n) - \underline{f}), \quad (20)$$

gdzie \hat{B}^{-1} opisano w poprzedniej części, a τ należy wybrać zgodnie z następującym twierdzeniem, którego dowód można znaleźć np. w [9]

Twierdzenie 5.1 *Jeśli układ (12) ma rozwiązanie \underline{u} i spełnione są następujące dwa założenia:*

$$\exists \delta_0 \geq 0 \forall \underline{u}, \underline{v} \in R^{N_h} \quad (A(\underline{u}) - A(\underline{v}), \underline{u} - \underline{v})_{R^{N_h}} \geq \delta_0 \|\underline{u} - \underline{v}\|_{\hat{B}}^2 \quad (21)$$

$$\exists \delta_1 \geq 0 \forall \underline{u}, \underline{v} \in R^{N_h} \quad \|A(\underline{u}) - A(\underline{v})\|_{\hat{B}^{-1}}^2 \leq \delta_1 \|\underline{u} - \underline{v}\|_{\hat{B}}^2, \quad (22)$$

to wtedy metoda iteracyjna (20) jest zbieżna dla $0 < \tau < 2\delta_0 \delta_1^{-1}$ z oszacowaniem

$$\|\underline{u}^n - \underline{u}\|_{\hat{B}} \leq \rho(\tau) \|\underline{u}^{n-1} - \underline{u}\|_{\hat{B}},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= (1 - 2 * \tau \delta_0 + \tau^2 \delta_1)^{1/2} < 1 \\ \rho(\tau) &\geq \rho(\tau^*) = (1 - \delta_0^2 \delta_1^{-1})^{1/2}, \quad \tau^* = \delta_0 \delta_1^{-1} \end{aligned}$$

Dowód:

Niech $\underline{z}^{n+1} = \underline{u}^{n+1} - \underline{u}$. Wtedy z (20) mamy

$$\underline{z}^{n+1} = \underline{z}^n - \tau \hat{B}^{-1}(A(\underline{u}^n) - A(\underline{u})),$$

zatem biorąc kwadrat normy energetycznej dla \hat{B} otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|\underline{z}^{n+1}\|_{\hat{B}}^2 &= \|\underline{z}^n\|_{\hat{B}}^2 - 2\tau (A(\underline{u}^n) - A(\underline{u}), \underline{z}^n)_{R^{N_h}} + \tau^2 \|(A(\underline{u}^n) - A(\underline{u}))\|_{\hat{B}^{-1}}^2 \leq \\ &\leq (1 - 2\tau \delta_0 + \tau^2 \delta_1) \|\underline{z}^n\|_{\hat{B}}^2 = \rho(\tau)^2 \|\underline{z}^n\|_{\hat{B}}^2 \end{aligned}$$

Oczywiście

$$\rho(\tau) < 1 \text{ dla } 0 < \tau < 2\delta_0\delta_1$$

a osiąga minimum dla $\tau^* = \delta_0\delta_1^{-1}$ wynoszące $\rho(\tau^*) = (1 - \delta_0^2\delta_1^{-1})^{1/2}$, co dowodzi tezy twierdzenia. \square

Z Wniosku 2 z poprzedniego rozdziału wynika następujący lemat:

Lemat 5.1 *Operator A spełnia warunek (21) z Twierdzenia 5.1, tzn.*

$$(A(\underline{u}) - A(\underline{v}), \underline{u} - \underline{v})_{R^{N_h}} \geq \delta_0 \|\underline{u} - \underline{v}\|_{\hat{B}}^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned} (A(\underline{u}) - A(\underline{v}), \underline{u} - \underline{v})_{R^{N_h}} &= a(u_h, u_h - v_h) - a(v_h, u_h - v_h) \geq \\ &\geq \gamma \|u_h - v_h\|_{H^1}^2 \geq \delta_0 \|\underline{u} - \underline{v}\|_{\hat{B}}^2 \quad \square \end{aligned}$$

Oznacza to spełnienie pierwszego założenia twierdzenia 5.1. Spełnienie drugiego założenia twierdzenia 5.1 wynika z następującego lematu:

Lemat 5.2 *Operator A spełnia warunek (22) z Twierdzenia 5.1 tzn.*

$$\exists \delta_1 \geq 0 \forall \underline{u}, \underline{v} \in R^{N_h} \ \|A(\underline{u}) - A(\underline{v})\|_{\hat{B}^{-1}}^2 \leq \delta_1 \|\underline{u} - \underline{v}\|_{\hat{B}}^2$$

Dowód:

Z (9) wynika, że

$$\exists \delta_1 > 0 \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in R^{N_h} \ |(A(\underline{u}) - A(\underline{v}), \underline{w})_{R^{N_h}}| \leq \delta_1^{1/2} \|\underline{u} - \underline{v}\|_{\hat{B}} \|\underline{w}\|_{\hat{B}}$$

Niech $g = A(\underline{u}) - A(\underline{v})$ i mamy $\|A(\underline{u}) - A(\underline{v})\|_{\hat{B}^{-1}} = \|\hat{B}^{-1}g\|_{\hat{B}}$ i

$$\begin{aligned} \|\hat{B}^{-1}g\|_{\hat{B}} &= \sup_{\underline{w} \in R^{N_h}} |(\hat{B}^{-1}g, \underline{w})_{\hat{B}}| / \|\underline{w}\|_{\hat{B}} = \sup_{\underline{w} \in R^{N_h}} |(g, \underline{w})_{R^{N_h}}| / \|\underline{w}\|_{\hat{B}} \leq \\ &\leq \sup_{\underline{w} \in R^{N_h}} |(A(\underline{u}) - A(\underline{v}), \underline{w})_{R^{N_h}}| / \|\underline{w}\|_{\hat{B}} \leq \delta_1^{1/2} \|\underline{u} - \underline{v}\|_{\hat{B}} \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. \square

Z powyższych lematów i Twierdzenia 5.1 otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 3 Metoda (20) dla zadania (12) jest zbieżna dla $\tau: 0 < \tau < 2\delta_0 \delta_1^{-1}$ z oszacowaniem

$$\|\underline{u}^n - \underline{u}\|_{\hat{B}} \leq \rho(\tau)^n \|\underline{u}^0 - \underline{u}\|_{\hat{B}}$$

gdzie

$$\rho(\tau) = (1 - 2 * \tau \delta_0 + \tau^2 \delta_1)^{1/2} < 1$$

Parametr optymalny wynosi $\tau^* = \delta_0 \delta_1^{-1}$ i dla niego mamy:

$$\rho(\tau^*) = (1 - \delta_0^2 \delta_1^{-1})^{1/2}$$

Tutaj $\rho(\tau)$ nie zależy od h ani L - (liczby poziomów w konstrukcji \hat{B}^{-1}).

5.2 Implementacja

Algorytm rozwiązywania (12) można implementować jako równoległy albo sekwencyjny. W ostatnim podrozdziale poprzedniego rozdziału opisano implementację \hat{B}^{-1} .

Algorytm:

\underline{u}^0 dowolne

repeat

1. $\underline{r}^n = A(\underline{u}^n) - \underline{f}$
2. $\underline{z}^n = \hat{B}^{-1} \underline{r}^n =$
 $= (\Pi_1 K_1^{-1} \Pi_1^t + \dots + \Pi_l D_l^{-1} \Pi_l^t + \dots + \Pi_{L-1} D_{L-1}^{-1} \Pi_{L-1}^t + D_L^{-1}) \underline{r}^n$
3. $\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n - \tau \underline{z}^n$

until zbieżność.

Jeżeli powyższy algorytm zaimplementujemy jako równoległy na L procesorach, (L -ilość poziomów), to można zauważyć, że speedup czyli stosunek czasu wykonania algorytmu na L procesorach do czasu wykonania na jednym procesorze wynosi L . Równocześnie komunikacja oraz synchronizacja są niewielkie.

6 Metoda Newtona z wewnętrznymi i zewnętrznymi iteracjami

W tym rozdziale opiszemy zastosowanie metody Newtona z wewnętrznymi i zewnętrznymi iteracjami do rozwiązania (12) zob. np. [9, str 108-110].

Oczywiście ponieważ $\|\cdot\|_{H^1} \sim \|\cdot\|_B \sim \|\cdot\|_{\hat{B}}$ to z (15) i z (16) wynika, że $\forall \underline{u} \in R^{N_h}$ $A'(\underline{u})$ jest dodatnio określony w R^{N_h} ze stałą niezależną od \underline{u} tj.

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in R^{N_h} \quad (A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{v}) \geq \gamma \|\underline{v}\|_{\hat{B}}^2 \quad (23)$$

oraz $A'(\underline{u})$ są jednostajnie ograniczone tj.

$$\exists M > 0 \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in R^{N_h} \quad |(A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{w})| \leq M \|\underline{v}\|_{\hat{B}} \|\underline{w}\|_{\hat{B}} \quad (24)$$

Przy pewnych dodatkowych założeniach na współczynniki wyjściowego problemu mamy, że w pewnej kuli $S_{\hat{B}}$ o środku w rozwiązaniu \underline{u} pochodna spełnia warunek Lipschitza:

$$\exists b > 0 \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in S \quad \underline{w} \in R^{N_h} \quad \|(A'(\underline{u}) - A'(\underline{v}))\underline{w}\|_{\hat{B}^{-1}} \leq b \|\underline{u} - \underline{v}\|_{\hat{B}} \|\underline{w}\|_{\hat{B}} \quad (25)$$

6.1 Opis metody

Do rozwiązania (12) zastosujemy metodę Newtona :

$$A'(\underline{u}^n)(\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) = -A(\underline{u}^n) + \underline{f} \quad (26)$$

\underline{u}^n oznaczają kolejne iteracje w metodzie Newtona. Przy danym \underline{u}^n aby uzyskać \underline{u}^{n+1} trzeba rozwiązać liniowy problem:

$$A'(\underline{u}^n)\underline{v} = g \quad (27)$$

gdzie

$$\underline{v} = \underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n \quad i \quad g = -A(\underline{u}^n) + \underline{f} \quad (28)$$

Do rozwiązania powyższego liniowego problemu użyjemy metody iteracyjnej; może nią być np. metoda Richardsona. Proponujemy tę metodę, ponieważ można pokazać jej zbieżność przy założeniach, które nakładamy na operator A . Zauważmy, że w szczególności $A'(\underline{u}^n)$ nie musi być samosprężony w R^{N_h} . Metoda Richardsona, por. (20), dla (27) ma postać:

$$\underline{v}^{m+1} = \underline{v}^m - \tau \hat{B}^{-1}(A'(\underline{u}^n)\underline{v}^m - g) \quad (29)$$

\underline{v}^m - będziemy nazywali iteracjami wewnętrznymi w odróżnieniu od \underline{u}^n iteracji metody Newtona, które nazwiemy iteracjami zewnętrznymi. τ należy dobrać zgodnie z twierdzeniem 5.1, którego założenia są spełnione, zob. (23) i (24). Wtedy z twierdzenia 5.1 wynika oszacowanie błędu dla $\tau = \gamma/M$

$$\|\underline{v}^m - \underline{v}\|_{\hat{B}} \leq \rho(\tau)^m \|\underline{v}^0 - \underline{v}\|_{\hat{B}}$$

$$\text{gdzie } \rho(\tau) = (1 - \gamma^2/M)$$

Przy rozwiązywaniu (27) metodą (29) będziemy brali pierwsze przybliżenie jako $\underline{v}^0 = 0$. Podsumujmy: jeśli znamy \underline{u}^n , to aby znaleźć \underline{u}^{n+1} należy iteracyjnie metodą (29) rozwiązywać (26) biorąc zerowe pierwsze przybliżenie i następnie, jeśli \underline{v}^{k_n} jest k_n przybliżeniem \underline{v} - rozwiązania, (27) to przyjmujemy, że

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \underline{v}^{k_n}$$

jest dostatecznie dobrym przybliżeniem \underline{u}^{n+1} z (26). Dalej to przybliżenie oznaczamy dla wygody również \underline{u}^{n+1} .

6.2 Analiza zbieżności

Zdefiniujemy teraz operator R_n zmniejszenia błędu po k_n wewnętrznych iteracjach przy zastosowaniu metody iteracyjnej do rozwiązania (27), który będzie nam potrzebny w analizie zbieżności metody zaproponowanej w poprzednim podrozdziale.

Definicja 4 *Niech R_n będzie operatorem zmniejszenia błędu po k_n wewnętrznych iteracjach przy zastosowaniu metody iteracyjnej do rozwiązania (27), tzn jeśli \underline{v} jest rozwiązaniem (27) i \underline{v}^m kolejne wewnętrzne iteracje, to*

$$\underline{v}^{k_n} - \underline{v} = R_n(\underline{v}^0 - \underline{v})$$

Oczywiście przy zastosowaniu metody Richardsona (29) mamy, że

$$\underline{v}^{m+1} - \underline{v} = \underline{v}^m - \underline{v} - \tau \hat{B}^{-1}(A'(\underline{u}^n)\underline{v}^m - g) = (I - \tau A'(\underline{u}^n))(\underline{v}^m - \underline{v})$$

Zatem

$$R_n = (I - \tau \hat{B}^{-1} \cdot A'(\underline{u}^n))^{k_n}$$

i

$$\|R_n\| \leq q_n = \rho(\tau)^{k_n} < 1$$

Lemat 6.1 *Biorąc zerową pierwszą iterację wewnętrzną, tzn. $\underline{v}^0 = 0$, otrzymamy, że k_n -wewnętrzna iteracja pokrywa się z rozwiązaniem następującego problemu liniowego:*

$$A'(\underline{u}^n)(I - R_n)^{-1}\underline{w} = g$$

Dowód: zob. np. [9, str. 89]

Mamy

$$\begin{aligned}\underline{v}^{k_n} - \underline{v} &= R_n(\underline{v}^0 - \underline{v}) = -R_n\underline{v} \\ \underline{w} := \underline{v}^{k_n} &= -R_n\underline{v} + \underline{v} = (I - R_n)\underline{v}\end{aligned}$$

stąd podstawiając do (27) mamy

$$\underline{v} = (I - R_n)^{-1}\underline{w} \quad \text{gdy} \quad \|R_n\|_{\hat{B}} < 1$$

ponieważ jeśli $\|R_n\|_{\hat{B}} < 1$ to $(I - R_n)$ jest odwracalny. Jest to znany fakt z analizy funkcjonalnej. \square

Teraz korzystając z tego, że $\underline{u}^{n+1} = \underline{v} + \underline{u}^n$ i $g = -A(\underline{u}^n) + \underline{f}$, gdzie \underline{v} rozwiązanie (27) oraz korzystając z powyższego lematu dostaniemy, że przybliżenie \underline{u}^{n+1} , które dalej też będziemy oznaczać przez \underline{u}^{n+1} będzie spełniać zależność:

$$A'(\underline{u}^n)(I - R_n)^{-1}(\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) = -A(\underline{u}^n) + \underline{f} \quad (30)$$

Zauważmy, że jeśli oznaczymy $C^{-1} = A'(\underline{u}^n)(I - R_n)^{-1}$ to powyższą metodę można interpretować, jako zwykłą metodą Richardsona z preconditionerem C^{-1} .

Teraz podamy kilka pomocniczych lematów, które wykorzystamy później w dowodzie zbieżności. Kluczowy jest Lemat 6.4 z którego wynika zbieżność metody.

Lemat 6.2 *Jeśli spełnione jest*

$$\forall \underline{u}, \underline{v} \in S \quad \underline{w} \in R^{N_h} \quad \|(A'(\underline{u}) - A'(\underline{v}))\underline{w}\|_{\hat{B}^{-1}} \leq b\|\underline{u} - \underline{v}\|_{\hat{B}}\|\underline{w}\|_{\hat{B}}$$

to

$$\|A(\underline{v}) - A(\underline{u}) - A'(\underline{u})(\underline{v} - \underline{u})\|_{\hat{B}^{-1}} \leq b2^{-1}\|\underline{v} - \underline{u}\|_{\hat{B}}^2$$

Dowód:

Niech $\underline{z} = \underline{v} - \underline{u}$. Wtedy

$$A(\underline{u} + \underline{z}) - A(\underline{u}) - A'(\underline{u})\underline{z} = \int_0^1 (A'(\underline{u} + t\underline{z}) - A'(\underline{u}))\underline{z} dt$$

stąd

$$\|A(\underline{u} + \underline{z}) - A(\underline{u}) - A'(\underline{u})\underline{z}\|_{\hat{B}^{-1}} \leq \int_0^1 \|(A'(\underline{u} + t\underline{z}) - A'(\underline{u}))\underline{z}\|_{\hat{B}^{-1}} dt$$

i z założenia lematu

$$\leq \int_0^1 b \|t\underline{z}\|_{\hat{B}} \|\underline{z}\|_{\hat{B}} dt \leq b \|\underline{z}\|_{\hat{B}}^2 \int_0^1 t dt = 2^{-1} b \|\underline{z}\|_{\hat{B}}^2 \quad \square$$

Lemat 6.3 Z (23) i (24) otrzymujemy odpowiednio

$$\forall \underline{u}, \underline{v} \in V^h \quad \|A'(\underline{u})\underline{v}\|_{\hat{B}^{-1}} \leq M \|\underline{v}\|_{\hat{B}}$$

$$\forall \underline{u}, \underline{v} \in R^{N_h} \quad \|(A'(\underline{u}))^{-1}\underline{v}\|_{\hat{B}} \leq \frac{1}{\gamma} \|\underline{v}\|_{\hat{B}^{-1}}$$

Dowód:

Korzystając (24) mamy, że

$$\begin{aligned} \|A'(\underline{u})\underline{v}\|_{\hat{B}^{-1}} &= \|\hat{B}^{-1}A'(\underline{u})\underline{v}\|_{\hat{B}} = \sup_{\underline{w} \in R^{N_h}} \frac{(\hat{B}^{-1}A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{w})_{\hat{B}}}{\|\underline{w}\|_{\hat{B}}} = \\ &= \sup_{\underline{w} \in R^{N_h}} \frac{(A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{w})_{R^{N_h}}}{\|\underline{w}\|_{\hat{B}}} \leq M \|\underline{v}\|_{\hat{B}} \end{aligned}$$

oraz na podstawie (23) dla $\|\underline{v}\|_{\hat{B}} \neq 0$

$$\begin{aligned} \gamma \|\underline{v}\|_{\hat{B}} &\leq \frac{(A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{v})_{R^{N_h}}}{\|\underline{v}\|_{\hat{B}}} = \frac{(\hat{B}^{-1}A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{v})_{\hat{B}}}{\|\underline{v}\|_{\hat{B}}} = \\ &= \sup_{\underline{w} \in R^{N_h}} \frac{(\hat{B}^{-1}A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{w})_{\hat{B}}}{\|\underline{w}\|_{\hat{B}}} = \|\hat{B}^{-1}A'(\underline{u})\underline{v}\|_{\hat{B}} = \|A'(\underline{u})\underline{v}\|_{\hat{B}^{-1}} \end{aligned}$$

zatem biorąc $\underline{v} = (A'(\underline{u}))^{-1}\underline{w}$

$$\forall \underline{u}, \underline{w} \in R^{N_h} \quad \|(A'(\underline{u}))^{-1}\underline{w}\|_{\hat{B}} \leq \frac{1}{\gamma} \|\underline{w}\|_{\hat{B}^{-1}}$$

co kończy dowód lematu. \square

Niech $K_{\widehat{B}}(\underline{u}, r) = \{\underline{v} \in R^{N_h} : \|\underline{u} - \underline{v}\|_{\widehat{B}} \leq r\}$

Następujący lemat mówi o zbieżności metody (30) por. [9, str 108-109]

Lemat 6.4 Niech \underline{u} będzie rozwiązaniem (12), zaś $S = K_{\widehat{B}}(\underline{u}, r)$. Niech

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in R^{N_h} \quad (A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{v}) \geq \gamma \|\underline{v}\|_{\widehat{B}}^2$$

$$\exists M > 0 \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in R^{N_h} \quad |(A'(\underline{u})\underline{v}, \underline{w})| \leq M \|\underline{v}\|_{\widehat{B}} \|\underline{w}\|_{\widehat{B}}$$

$$\exists b > 0 \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in S \quad \underline{w} \in R^{N_h} \quad \|(A'(\underline{u}) - A'(\underline{v}))\underline{w}\|_{\widehat{B}^{-1}} \leq b \|\underline{u} - \underline{v}\|_{\widehat{B}} \|\underline{w}\|_{\widehat{B}}$$

Wtedy dla R_n spełniającego

$$\|R_n\| \leq q_n < 1$$

i dla $\underline{u}^n \in S$ z \underline{u}^{n+1} spełniającym (30) mamy oszacowanie

$$\|\underline{z}^{n+1}\|_{\widehat{B}} \leq \frac{1}{\gamma} (2^{-1} l \|\underline{z}^n\|_{\widehat{B}}^2 + \xi^n) \quad (31)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \underline{z}^n &= \underline{u}^n - \underline{u}, \quad \underline{z}^{n+1} = \underline{u}^{n+1} - \underline{u} \\ \xi^n &= q_n(1 - q_n)^{-1} M \|\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n\|_{\widehat{B}} \end{aligned}$$

Dowód:

Z lematu 6.3 otrzymujemy $\forall \underline{u} \in S \quad \forall \underline{v} \in R^{N_h}$

$$\|A'(\underline{u})\underline{v}\|_{\widehat{B}^{-1}} \leq M \|\underline{v}\|_{\widehat{B}} \quad (32)$$

$$\|(A'(\underline{u}))^{-1}\underline{v}\|_{\widehat{B}} \leq \frac{1}{\gamma} \|\underline{v}\|_{\widehat{B}^{-1}} \quad (33)$$

Z (30) mamy, że

$$A'(\underline{u}^n)\underline{z}^{n+1} = g_0 + g_1$$

gdzie

$$\begin{aligned} g_0 &= A(\underline{u}) - A(\underline{u}^n) - A'(\underline{u}^n)\underline{z}^n \\ g_1 &= A'(\underline{u}^n)[(I - R_n)^{-1} - I](\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n) \end{aligned}$$

zatem z (33) mamy, że

$$\|\underline{z}^{n+1}\|_{\widehat{B}} = \|A'(\underline{u}^n)^{-1}(g_0 + g_1)\|_{\widehat{B}} \leq \gamma^{-1}(\|g_0\|_{\widehat{B}^{-1}} + \|g_1\|_{\widehat{B}^{-1}})$$

Z Lipschitzowskości A' w S oraz z lematu 6.2 wynika, że
 $\forall \underline{u}, \underline{z}$ takich, że $\underline{u}, \underline{u} + \underline{z} \in S$

$$\|A(\underline{u} + \underline{z}) - A(\underline{u}) - A'(\underline{u})\underline{z}\|_{\widehat{B}^{-1}} \leq 2^{-1}b\|\underline{z}\|_{\widehat{B}}^2$$

więc otrzymujemy, że

$$\|g_0\|_{\widehat{B}^{-1}} = \|A(\underline{u}) - A(\underline{u}^n) - A'(\underline{u}^n)\underline{z}^n\|_{\widehat{B}^{-1}} \leq 2^{-1}b\|\underline{z}^n\|_{\widehat{B}}^2$$

na podstawie (32) i tego, że $\|R_n\| < q_n < 1$ otrzymujemy też, że

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{\widehat{B}^{-1}} &= \|A'(\underline{u}^n)[(I - R_n)^{-1} - I](\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n)\|_{\widehat{B}^{-1}} \\ &\leq M\|R_n(I - R_n)^{-1}(\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n)\|_{\widehat{B}} \leq q_n(1 - q_n)^{-1}\|\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n\|_{\widehat{B}} \end{aligned}$$

ponieważ

$$[(I - R_n)^{-1} - I] = [I - (I - R_n)](I - R_n)^{-1} = [R_n(I - R_n)^{-1}]$$

oraz

$$\|R_n(I - R_n)^{-1}\| \leq q_n(1 - q_n)^{-1} \quad \square$$

Z powyższego lematu wynika twierdzenie o zbieżności (30)

Twierdzenie 6.1 *Jeśli spełnione są założenia powyższego lematu i jeśli promień r kuli S i wszystkie q_n są dostatecznie małe tak, że*

$$q_n(1 - q_n)^{-1} M\gamma^{-1} \leq q < 1$$

i

$$(1 - q)^{-1}(2^{-1}\gamma^{-1}br + q) \leq \alpha < 1$$

to wtedy przy $\underline{u}^0 \in S$ (30) zbiega z oszacowaniem

$$\|\underline{z}^k\|_{\widehat{B}} \leq \alpha^k \|\underline{z}^0\|_{\widehat{B}}$$

Dowód:

Jeśli

$$\|\underline{z}^k\|_{\hat{B}} \leq r$$

to z lematu i założeń twierdzenia mamy, że

$$\|\underline{z}^{k+1}\|_{\hat{B}} \leq \gamma^{-1} b 2^{-1} r \|\underline{z}^k\|_{\hat{B}} + q(\|\underline{z}^{k+1}\|_{\hat{B}} + \|\underline{z}^k\|_{\hat{B}})$$

więc

$$\|\underline{z}^{k+1}\|_{\hat{B}} \leq \alpha \|\underline{z}^k\|_{\hat{B}}$$

co dowodzi tezy twierdzenia. \square

Powyższe twierdzenie stwierdza, że jeśli \underline{u}^0 jest dostatecznie blisko rozwiązania (12) \underline{u} i jeśli iteracje wewnętrzne dostatecznie dobrze zbiegają tzn. $q_n < 1$ jest dostatecznie małe, to metoda (30) jest zbieżna. Gdyby $R_n = 0$ to byśmy mieli do czynienia ze standardową metodą Newtona.

6.3 Implementacja

Algorytm rozwiązywania (12) można implementować jako równoległy albo sekwencyjny. Różnice występują w implementacji \hat{B}^{-1} , który stosujemy przy liczeniu wewnętrznych iteracji.

Algorytm: \underline{u}^0 dane*repeat*

1. $\underline{r}^n = -A(\underline{u}^n) + \underline{f}$
2. Obliczyć Jakobian $A'(\underline{u}^n)$
3. Rozwiązać układ $A'(\underline{u}^n)\underline{w}^n = \underline{r}^n$
 $\underline{v}^0 = 0$
repeat

(a) $\underline{x}^m = A'(\underline{u}^n)\underline{v}^m - \underline{r}^n$

(b) $\underline{z}^m = \hat{B}^{-1}\underline{x}^m =$
 $= (\Pi_1 K_1^{-1} \Pi_1^t + \dots + \Pi_l D_l^{-1} \Pi_l^t + \dots + \Pi_{L-1} D_{L-1}^{-1} \Pi_{L-1}^t + D_L^{-1}) \underline{x}^m$

(c) $\underline{v}^{m+1} = \underline{v}^m - \tau \underline{z}^m$

until błąd residualny dostatecznie mały po k_n iteracjach.

4. $\underline{w}^n = \underline{v}^{k_n}$

5. $\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \underline{w}^n$

until zbieżność.

Jeżeli powyższy algorytm zastosujemy jako równoległy na L procesorach, (L-ilość poziomów), to można zauważyć, że speedup czyli stosunek czasu wykonania algorytmu na L procesorach do czasu wykonania na jednym procesorze wynosi L. Równocześnie komunikacja oraz synchronizacja są niewielkie.

7 Eksperymenty numeryczne

W tym rozdziale przedstawimy kilka wyników numerycznych eksperymentów związanych z algorytmami przedstawionymi w rozdziałach 5 i 6. Te eksperymenty zostały przeprowadzone na sprzęcie sun4m z procesorem sparcs Instytutu Matematyki Stosowanej i Mechaniki, na jednostkowym kwadracie podzielonym na kwadraty jednakowej wielkości dla następującego równania:

$$\begin{cases} -\Delta u + u(u_x + u_y) = f(x, y) & w \quad \Omega \\ u = 0 & na \quad \partial\Omega \end{cases}$$

W [2, Bank, Rose] przeprowadzono eksperymenty dla metody Newtona dla tego samego zagadnienia. Nie spełnia ono wszystkich założeń, które przedstawiliśmy w rozdziale 1. Kolejne triangulacje otrzymujemy poprzez podział kwadratów z kolejnych poziomów na dwa trójkąty jednakowej wielkości. W pierwszej tabeli podane są wyniki dla algorytmu opisanego w rozdziale 5, tzn. metody Richardsona:

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n - \tau \hat{B}^{-1}(A(\underline{u}^n) - f)$$

Parametr τ dobrano doświadczalnie, tzn. tak aby otrzymać minimalną liczbę iteracji. W ostatniej kolumnie podane są liczby iteracji koniecznych, aby błąd residualny był mniejszy od błędu początkowego pomnożonego przez ustalony czynnik 10^{-4} w normie $\|\cdot\|_{\hat{B}^{-1}}$.

Poziomy	Niewiadome	τ	Liczba iteracji
2	$(4 - 1)^2$	1.7	32
3	$(8 - 1)^2$	1.73	32
4	$(16 - 1)^2$	1.74	33
5	$(32 - 1)^2$	1.735	34
6	$(64 - 1)^2$	1.715	38
7	$(128 - 1)^2$	1.7	41
8	$(256 - 1)^2$	1.69	44

W następnej tabeli przedstawiamy zależność metody Richardsona od parametru τ . Eksperyment przeprowadziliśmy na 5 poziomach, tzn. dla $(32 - 1)^2$

niewiadomych z tym samym warunkiem stopu.

parametr τ	Liczba iteracji
1.5	140
1.6	76
1.7	41
1.72	37
1.73	35
1.735	34
1.74	33
1.745	37
1.75	52
1.76	metoda nie zbiega

W następnej tabeli przedstawione są wyniki dla metody Newtona z wewnętrznymi i zewnętrznymi iteracjami, metody opisanej w rozdziale 6, por. [2]. W ostatniej kolumnie podano liczby iteracji zewnętrznych (tzn iteracji metody Newtona) potrzebnych do tego, aby błąd residualny był mniejszy od błędu początkowego pomnożonego przez ustalony czynnik 10^{-4} w normie $\|\cdot\|_{\hat{B}^{-1}}$. Liczba iteracji wewnętrznych potrzebnych w każdej iteracji zewnętrznej zależy od warunku stopu oraz ponieważ stosujemy metodę Richardsona, od parametru τ . Jako warunek stopu wzięliśmy zmniejszenie początkowego błędu residualnego o czynnik 10^{-4} . Zauważyliśmy, że znalezienie zbyt dokładnego rozwiązania w iteracjach wewnętrznych nie zmniejsza liczby iteracji zewnętrznych, ale oczywiście zbyt niedokładne rozwiązanie zwiększy ilość iteracji zewnętrznych.

Poziomy	Niewiadome	Liczba iteracji zewnętrznych
2	$(4 - 1)^2$	4
3	$(8 - 1)^2$	6
4	$(16 - 1)^2$	6
5	$(32 - 1)^2$	6
6	$(64 - 1)^2$	5
7	$(128 - 1)^2$	5
8	$(256 - 1)^2$	5

Z eksperymentów wynika, że liczby iteracji nie zależy od liczby niewiadomych i liczby poziomów. Jak wynika z tabelki 2, parametr τ ma istotny wpływ na metodę Richardsona.

Literatura

- [1] Bank, R. E., and Rose, D. J. : Global approximate Newton methods. *Numerische Mathematik*, 37 : 279-295, 1981.
- [2] Bank, R. E., and Rose, D. J. : Analysis of a Multilevel Iterative Method for Nonlinear Finite Elements Equation. *Mathematics of Computation*, 39 : 453-465, 1982.
- [3] Cai, X-C, Dryja, M. : The additive Schwarz method for quasilinear finite element elliptic problems. The Seventh Int. Conf. on DDM. October, 1993, The Penn State University, USA.
- [4] Ciarlet, P. G. : *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.
- [5] Ciarlet, P. G., Schultz, M. H., and Varga, R. S. : Numerical Methods of High-Order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems. *Numerische Mathematik*, 13 : 51-77, 1969.
- [6] Dryja, M. : Metoda Galerkina naprzemiennych kierunków dla quasiliniowych równań parabolicznych. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria III: Matematyka Stosowana XV, 1979. str 5-23.
- [7] Dryja, M., and Widlund O. B. : Some domain decomposition algorithms for elliptic problems. In Linda Hayes and Dawid Kincaid, editors, *Iterative Methods for Large Linear Systems*, pages 273-291, San Diego, California, 1989. Academic Press. Proceedings of the Conference on Iterative Methods for Large Linear Systems held in Austin, Texas, October 19-21, 1988, to celebrate the sixty-fifth birthday of David M. Young, Jr.
- [8] Dryja, M., and Widlund O. B. : Multilevel additive methods for elliptic finite element problems. In Wolfgang Hackbusch, editor, *Parallel Algorithms for Partial Differential Equations, Proceedings of the Sixth GAMM-Seminar, Kiel, January 19-21, 1990*, Braunschweig, Germany, 1991, Vieweg & Son.
- [9] D'yakonov, E. G. : *Minimization of Computational Work. Asymptotically Optimal Algorithms for Elliptic Problems*. Moscow, 1989.

- [10] Ladyzenskaya, O. A., Uralceva N. N.: *Linear and quasilinear elliptic partial differential equations*, Moscow, 1973. (po rosyjsku)
- [11] Lions, J. L. : *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Paris, 1969.
- [12] Ortega, J. M., and Rheinboldt, W. C. : *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. New York, Academic Press, 1970.
- [13] Zhang, X. : Multilevel Schwarz methods. *Numerische Mathematik*, 63 : 521-539, 1992.