Metoda mortarowa dla eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych drugiego i czwartego rzędu.

(autoreferat)

Leszek Marcinkowski

Styczeń 1999

Eliptyczne równania różniczkowe cząstkowe odgrywają istotną rolę w modelowaniu licznych zjawisk mających zastosowanie w fizyce, przemyśle, naukach o środowisku, biologii i medycynie, itp. W szczególności klasa tych równań obejmuje monotoniczne liniowe i nieliniowe eliptyczne równania różniczkowe cząstkowe.

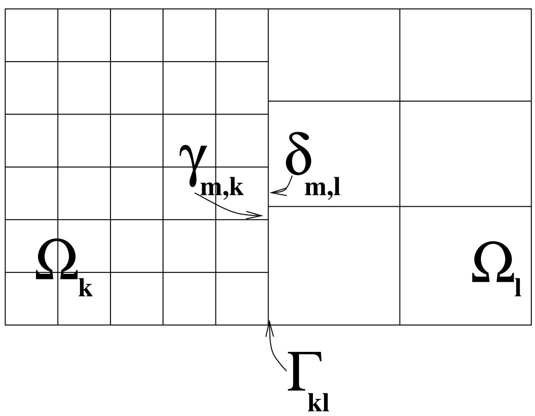
Rozprawa doktorska poświęcona jest dwóm problemom. Pierwszy to analiza zdyskretyzowanych eliptycznych zagadnień różniczkowych oparta na różnych wariantach metody mortarowej, tzn. metody dyskretyzacji na triangulacjach (siatkach) niezgodnych. Drugi problem to konstrukcja i analiza zbieżności algorytmów równoległych rozwiązywania powstałych problemów dyskretnych.

Ze względu na praktyczne zastosowania, istnieje duże zapotrzebowanie na konstrukcję, analizę i implementację efektywnych algorytmów równoległych umożliwiających obliczanie przybliżonych rozwiązań tych zagadnień. Algorytmy równoległe bazują na podziale dużego, np. ze względu na ilość niewiadomych, zadania na mniejsze, które mogą być rozwiązane równolegle, niezależnie od siebie.

Warto podkreślić, że w wyniku dyskretyzacji powyższych zagadnień powstają wielkie układy liniowych lub nieliniowych równań algebraicznych, co prawda o macierzach rozrzedzonych (w przypadku liniowym) ale o bardzo dużym wskaźniku uwarunkowania, których rozwiązanie wymaga dużej mocy obliczeniowej (superkomputerów) i szybkich, efektywnych algorytmów. Analiza metod rozwiązywania takich problemów wymaga dogłębnej wiedzy ze współczesnej teorii równań różniczkowych oraz teorii analizy numerycznej, jak też specjalistycznej wiedzy dla optymalizacji implementowanych algorytmów na komputery dużej mocy (wektorowe i równoległe). Aby w pełni wykorzystać możliwości maszyn cyfrowych o największej mocy, którymi obecnie są komputery masywnie równoległe, potrzebne są wyrafinowane algorytmy o bardzo dużym stopniu zrównoleglenia (prawo Amdahla - Ware'a).

Klasą bardzo efektywnych dla maszyn równoległych algorytmów numerycznego rozwiązywania zdyskretyzowanych równań różniczkowych jest metoda dekompozycji obszaru, a zwłaszcza addytywna metoda Schwarza (ASM).

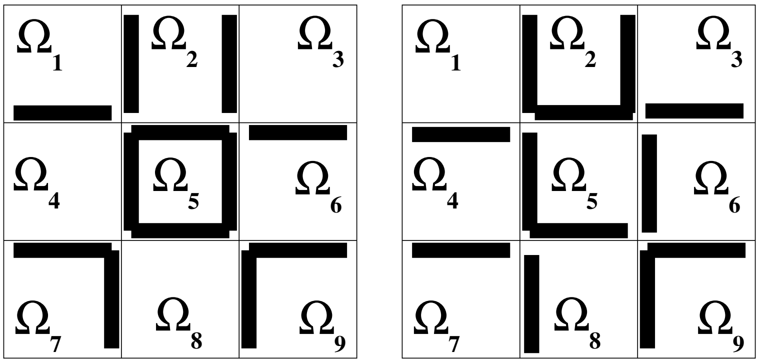
Większość metod dyskretyzacji równań różniczkowych cząstkowych używa triangulacji (siatek), które są definiowane najpierw na całym obszarze, a następnie dzielone na triangulacje lokalne. W wielu przypadkach dogodniej jest rozważać metody, które używają triangulacji zdefiniowanych lokalnie w podobszarach. Takie podejście umożliwia np. dokonywanie lokalnych adaptacyjnych zmian kilku lokalnych triangulacji bez konieczności zmieniania pozostałych i prowadzi do tzw. triangulacji niezgodnych, na wszystkich podobszarach różne triangulacje. Daje to możliwość stosowania różnych metod w różnych podobszarach np. metody Fouriera, metody spektralnej, metody elementu skończonego i innych.



Rysunek 1: Nie zgodne siatki na krawędzi Γ_{kl}.

Konieczne jest jednak nałożenia warunków zgodności na przecięciach brzegów podobszarów, aby zapewnić zbieżność dyskretyzacji. W tym celu wprowadza się słabą ciągłość śladów funkcji z przestrzeni dyskretnej. Jedną z możliwości jest nałożenie warunku ciągłości dyskretnych rozwiązań w pewnych wybranych punktach na brzegach podobszarów. Prowadzi to jednak do nieoptymalnych oszacowań błędu aproksymacji metody. Inną możliwością stosowaną w praktycznych obliczeniach jest nałożenie pewnych warunków zgodności typu całkowego, które gwarantują zbieżność optymalną.

W ostatnich latach opracowano nową klasę metod dekompozycji obszaru: tzw. metodę mortarową, w której wykorzystuje się podejście całkowe dla ciągłości na przecięciach podobszarów. Została ona zaproponowana przez szkołę francuską około dziesięciu lat temu, zob. [2]. Są dwa warianty metody mortarowej geometrycznie zgodny i geometrycznie niezgodny. W pierwszym wariancie obszar dzielony jest na kilka rozłącznych podobszarów, które są wielokątami, $\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{\Omega}_k$, w taki sposób, że przecięcie domknięć dwóch różnych podobszarów jest zbiorem pustym, ich wspólną krawędzią lub wierzchołkiem. Wtedy dokonujemy wyboru jednej ze stron wspólnej krawędzi $\overline{\Gamma}_{kl} = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_l$ odpowiadającej jednemu z podobszarów jako mortarowej $\gamma_{m,k}$ i drugiej jako nie-mortarowej $\delta_{m,l}$, por. Rysunki 1 i 2. W geometrycznie niezgodnym wariancie metody mortarowej zakłada się tylko, że istnieje dekompozycja $\overline{\Gamma} := \bigcup_{k=1}^{N} \partial\Omega_k \setminus \partial\Omega = \bigcup_m \overline{\gamma}_m$, gdzie γ_m są rozłącznymi krawędziami podobszarów. Inaczej mówiąc, podobszary Ω_i nie muszą mieć wspólnych wierzchołków.



Rysunek 2: Dwa możliwe wybory stron mortarowych.

Następnie w każdym obszarze dyskretyzujemy problem różniczkowy. W różnych podobszarach możemy użyć różnych metod dyskretyzacji np. metody elementu skończonego albo metod spektralnych. W rozprawie doktorskiej są rozważane tylko różne warianty metody elementu skończonego. Następnie metoda mortarowa wymaga, aby ślad (lub ślady dla równań czwartego rzędu) przybliżonego rozwiązania na dwóch sąsiadujących podobszarach miał ten sam rzut na pewną specjalną podprzestrzeń (lub podprzestrzenie dla równań czwartego rzędu) funkcji zdefiniowanych na ich wspólnym brzegu, związaną z nie-mortarową siatką zdefiniowaną na tej krawędzi, por. Rysunek 1. Warunek ten jest dużo słabszy niż warunek stosowany w zgodnych wariantach metody elementu skończonego, w których wymaga się równości przybliżonych rozwiązań z dwóch sąsiadujących podobszarów na ich wspólnym brzegu. Tak więc metody mortarowe zapewniają maksymalnie dużo swobody w tworzeniu różnych dyskretyzacji, a równocześnie zachowują lokalność przestrzeni dyskretnych co ułatwia tworzenie efektywnych algorytmów równoległych wyznaczania przybliżonych rozwiązań wyjściowych problemów różniczkowych.

Cel pracy.

Celem rozprawy doktorskiej jest

- Dyskretyzacja eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych drugiego oraz czwartego rzędu na triangulacjach niezgodnych przy pomocy różnych wariantów metod mortarowych zastosowanych do różnego typu dyskretyzacji metody elementu skończonego. Następnie przeprowadzenie analizy poprawności i zbieżności powstałych zadań dyskretnych oraz udowodnienie optymalnej zbieżności stosowanych dyskretyzacji.
- Konstrukcja, analiza i implementacja komputerowa metod numerycznych rozwiązywania liniowych i nieliniowych układów równań algebraicznych powstałych z dyskretyzacji powyższymi wariantami metody mortarowej. Implementacja rozważanych metod oparta jest na algorytmach równoległych należących do klasy metod dekompozycji obszaru.

Wyniki pracy.

W rozprawie doktorskiej udowodniono oszacowania błedów aproksymacji dla różnych wariantów metody mortarowej zastosowanych dla różnego typu zgodnych i niezgodnych metod elementu skończonego dla pewnych nieliniowych i liniowych eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu i dla niektórych liniowych problemów czwartego rzędu. Skonstruowaliśmy również i przeprowadziliśmy analizę kilku współbieżnych (równoległych) algorytmów rozwiązywania problemów dyskretnych powstałych z powyższych dyskretyzacji metodą mortarową. W pracy zawarte są też wyniki eksperymentów numerycznych, które potwierdziły niektóre wyniki teoretyczne z dwóch pierwszych części rozprawy doktorskiej. Niektóre wyniki rozprawy doktorskiej można znaleźć w [6] i [7].

W pierwszej części rozprawy analizujemy zgodny wariant metody mortarowej, w którym lokalnie stosujemy zgodne ciągłe, kawałkami liniowe funkcje dla quasiliniowych monotonicznych problemów eliptycznych drugiego rzędu. O ile nam wiadomo nie ma żadnych wyników dotyczących tego zagadnienia. Udowadniamy istnienie i jednoznaczność przybliżonych rozwiązań oraz oszacowanie błedu aproksymacji, które jest optymalne. W [3] zostały pokazane analogiczne wyniki ale dla eliptycznych równań *liniowych* drugiego rzędu.

Pokazujemy również, jak rozszerzyć i zastosować powyższe metody na bardziej ogólną klasę problemów, tzn. na pewne równania różniczkowe cząstkowe z silnymi nieliniowościami poprzez specjalne techniki tzw. obcinania (truncation method).

Dalej projektujemy dwa algorytmy rozwiązywania układu nieliniowych równań algebraicznych powstałych z takiej dyskretyzacji i dowodzimy ich zbieżności. Pierwszy algorytm powstał z połączenia metody Richardsona z metodą Newtona, a drugi jest nieliniową metodą dekompozycji obszaru opartą na abstrakcyjnym schemacie zaproponowanym w [4]. Oba algorytmy oparte są na tej samej dekompozycji przestrzeni dyskretnej. Różne algorytmy rozwiązywania zdyskretyzowanego metodą mortarową *liniowego* problemu zostały opracowane w wielu pracach: zob. bibliografię rozprawy doktorskiej. Wynik tej części pracy to zastosowanie techniki metody dekompozycji obszaru do zadań mortarowych.

W drugiej części rozprawy opracowaliśmy nowy wariant metody mortarowej dla liniowych eliptycznych problemów różniczkowych drugiego rzędu, w którym stosujemy lokalnie w każdym podobszarze niezgodne podprzestrzenie elementu skończonego typu Crouzeix-Raviart, tj. lokalne aproksymacje są funkcjami nieciągłymi. O ile nam wiadomo nie ma żadnych wyników dotyczących tego typu zagadnień. Dowodzimy poprawności postawienia problemu dyskretnego oraz analizę zbieżności aproksymacji.

Skonstruowaliśmy również algorytm typu addytywnej metody Schwarza, numerycznego rozwiązywania powstałego problemu dyskretnego. Zaprojektowany algorytm jest prawie optymalny, tzn. ilość iteracji potrzebna do zmniejszenia normy energetycznej w metodzie sprzężonych gradientów jest proporcjonalna do $(1 + \log(H/\underline{h})$, gdzie H jest parametrem "grubej" dekompozycji obszaru, tzn. podziału Ω na podoszary Ω_i, a $\underline{h} = \inf_i h_i$ i h_i jest parametrem siatki na podobszarze Ω_i. Opracowanie powyższego algorytmu i jego analiza zbieżności wymagało wprowadzenia i udowodnienia kilku nowych technicznych wyników koniecznych do przezwyciężenia trudności wynikłych z lokalnej niezgodności metod typu Crouzeix-Raviart.

W ostatniej części rozprawy opracowaliśmy kilka wariantów metody mortarowej dla różnego typu elementów skończonych dla liniowych równań czwartego rzędu, a dokładnie dla problemu "gięcia" płytki. O ile nam wiadomo nie ma żadnych wyników dotyczących tego zagadnienia. W [1] opracowano metodę mortarową, w której lokalnie rozważa się dyskretyzacje typu *spektralnego* dla równania biharmonicznego. W rozprawie analizujemy metody mortarowe, które lokalnie w podobszarach używają zgodnych przestrzeni elementu skończonego typu Bogner-Fox-Schmit (element bi-sześcienny), typu Hsieh-Clough-Tocher (HCT) i typu zredukowanego HCT, oraz niezgodnych przestrzeni elementu skończonego typu Adini oraz Morley. Technika mortarowa dla równań czwartego rzędu nakłada na każdy wspólny bok dwóch podobszarów dwa warunki mortarowe typu całkowego, tzn. słabą ciągłość na wspólnym brzegu. Zależą one od typu metody elementu skończonego w podobszarach. W przypadku metod lokalnie niezgodnych, tj. typu Adini lub Morley, w warunki mortarowe konieczne było wprowadzić dodatkowo również specjalne operatory interpolacji zdefiniowane na odpowiednich siatkach tego boku. Udowadniamy, że tak skonstruowane zadania dyskretne są poprawnie postawione. Ponadto udowadniamy optymalność błędu zbieżności aproksymacji.

Zaprojektowano i zanalizowano również cztery algorytmy równoległe rozwiązywania powstałych z tych dyskretyzacji liniowych układów równań algebraicznych.

Dwie pierwsze metody typu addytywnej metody Schwarza (ASM) są przeznaczone do rozwiązywania zagadnień przybliżonych dla metody mortarowej stosującej lokalne podprzestrzenie elementu skończonego typu HCT i zredukowanego HCT. Metody te są zbudowane na podobnej dekompozycji obszaru. Pierwsza jest typu strukturalnego, tj. najpierw wszystkie niewiadome wewnątrz podobszarów zostają wyeliminowane i otrzymuje się problem zdefiniowany na brzegach podobszarów. Druga metoda z kolei używa specjalnej zewnętrznej grubej siatki co wymusza wprowadzenie specjalnego operatora przejścia z tej siatki na lokalne drobne siatki. Mimo tego druga metoda wydaje się łatwiejsza w implementacji od metody pierwszej.

Trzecia metoda typu Neumanna-Neumanna przeznaczona jest do rozwiązywania zagadnień dyskretnych dla wszystkich wariantów metody mortarowej z lokalnie zgodnymi podprzestrzeniami elementu skończonego. Musimu tu dodatkowo założyć specjalny typ dekompozycji typu "szachownica". Metoda ta oparta jest na abstrakcyjnym schemacie konstrukcji metod typu Neumanna-Neumanna zaproponowanym w [5]. Ponieważ schemat ten jest dosyć ogólny, analiza tej metody była stosunkowo prosta, ale implementacja i stosowanie w praktyce wydaje się bardziej skomplikowane niż dwóch wcześniej wspomnianych metod.

Ostatnia metoda jest analogiczna do pierwszej ale jest przeznaczona do rozwiązywania problemu dyskretnego dla metody mortarowej z lokalnym podprzestrzeniami niezgodnej metody elementu skończonego typu Adini. Wyróżniamy ten przypadek ponieważ jego analiza wymaga wprowadzenia szeregu dodatkowych technicznych wyników i narzędzi koniecznych do przezwyciężenia trudności wynikłych z niezgodności lokalnych podprzestrzeni.

Wszystkie cztery metody są prawie optymalne, tzn. ilość iteracji potrzebna do zmniejszenia normy energetycznej w metodzie sprzężonych gradientów jest proporcjonalna do $(1+\log(H/\underline{h})$, gdzie H jest parametrem "grubej" dekompozycji obszaru, tzn. podziału Ω na podoszary Ω_i, a $\underline{h} = \inf_i h_i$ i h_i jest parametrem siatki na podobszarze Ω_i.

Część wyników pracy została opublikowana, zob. [6] i [7].

Literatura

[1] Z. Belhachmi, *Nonconforming mortar element methods for the spectral discretization of two-dimensional fourth-order problems*, SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), str. 1545–1573.

[2] C. Bernardi, N. Debit, i Y. Maday, *Couplage de méthodes spectrale et d'éléments finis: premiers résultats d'approximation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 305 (1987), str. 353–356.

[3] C. Bernardi, Y. Maday, i A. T. Patera, *A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method*, w Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Tom XI (Paris, 1989–1991), tom 299 Pitman Res. Notes Math. Ser., Longman Sci. Tech., Harlow, 1994, str. 13–51.

[4] M. Dryja i W. Hackbusch, *On the nonlinear domain decomposition method*, BIT, 37 (1997), str. 296–311.

[5] P. Le Tallec, J. Mandel, i M. Vidrascu, *A Neumann-Neumann domain decomposition algorithm for solving plate and shell problems*, SIAM J. Numer. Anal., 35 (1998), str. 836–867.

[6] L. Marcinkowski, *Mortar element method for quasilinear elliptic boundary value problems*, East-West J. Numer. Math., 4 (1996), str. 293–309.

[7] L. Marcinkowski, *The mortar element method with locally nonconforming elements*, BIT, 39 (1999), str. 716–739.