

Interpolacja, funkcje sklejjane (splajny)

Proszę rozwiązać w formie pisemnej każde zadanie na oddzielnej kartce na **21 maja 2010** - sprawdzone i ocenione mogą być tylko niektóre. (Nie przyjmuję zadań mailem)

Zadanie 1 (15pkt) Na odcinku $[0, 10]$ mamy węzły równo-odległe: $\{x_k\}_{k=0}^N$ z $x_k = k * h$ dla $h = \frac{10}{N}$. Dla danej funkcji $f(x) = \sin(4 * x)$ definiujemy funkcję ciągłą $s \in C([a, b])$ taką, że na każdym pod-odcinku (x_k, x_{k+1}) ta funkcja s jest wielomianem stopnia co najwyżej dwa i spełnia warunki interpolacyjne:

$$\begin{aligned} s(x_k) &= f(x_k) \quad k = 0, \dots, N \\ s\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \quad k = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

- (a) Czy taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie?
(b) Wyznacz możliwie małą stałą $C > 0$ niezależną od h (f ustalona!) taką, że

$$\|f - s\|_{\infty, [0, 10]} \leq C h^3.$$

Zadanie 2 Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły: $a = x_0 < \dots < x_N = b$. Niech s splajn kubiczny na tym podziale odcinka (czyli funkcja w $C^2([a, b])$ na pod-odcinkach będąca wielomianem kubicznym) i $f \in C^2([a, b])$ taka, że

$$f'(a) = f'(b) = f(x_k) = 0 \quad k = 0, \dots, N.$$

Pokaż, że

$$\int_a^b f^{(2)} s^{(2)} dx = 0.$$

Zadanie 3 Dla danych różnych węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ niech $\{l_k\}_{k=0}^n$ będzie bazą Lagrange' \mathcal{P}_n a dla tych węzłów, i niech $L_n f$ wielomian interpolujący daną funkcję ciągłą $f \in C([a, b])$ w tych węzłach. Pokaż, że

$$\|L_n f\|_{\infty, [a, b]} \leq \left(\sum_{k=0}^n \|l_k\|_{\infty, [a, b]} \right) \|f\|_{\infty, [a, b]}.$$