Egzamin - Metody Numerycznych 2010/11 - I termin

Z sześciu zadań należy wybrać i oddać tylko pięć zadań. Wszystkie odpowiedzi uzasadnić. W razie oddania wszystkich zadań do sumy punktów zostaną wliczone zadania najniżej ocenione.

Zadanie 1: W celu obliczenia przybliżenia wartości π można zastosować metodę Newtona do wyznaczenia miejsca zerowego funkcji $f_1(x) = \sin(x)$, albo metodę Newtona do funkcji $f_2(x) = (\cos(x) + 1)^2$.

1. Czy w obu przypadkach dla dostatecznie małego $\epsilon_0 = |x_0 - \pi|$ metoda Newtona będzie zbieżna?
2. Dla której z funkcji metoda Newtona znajdowanie przybliżenia będzie efektywniejsza, tzn. wykładnik zbieżności metody Newtona będzie większy?

Zadanie 2: Metoda Householdera

1. Znajdź rozkład QR metodą Householdera dla konkretnej macierzy $\mathbb{R}^{3,2}$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Macierz Q należy przedstawić jako iloczyn odpowiednich macierzy Householdera - $Q = H_2 \cdot H_1$ poprzez podanie odpowiednich wektorów Householdera, nie trzeba tych macierzy ani tworzyć ani wymnażać.
2. Wyraź rozwiązanie regularnego LZNK $Ax = b$ w terminach czynników rozkładu tzn. Q, R i b.

Zadanie 3: Chcemy rozwiązać układ równań liniowych $Ax^* = b$ dla $A \in \mathbb{R}^{20,20}$ z użyciem dwóch metod iteracyjnych (A) Richardsona z parametrem $\tau = \frac{1}{10}$ i metody (B) CG. Macierz A jest symetryczna i dodatkowo wiemy, że wartości własne A należą do odcinka $[\frac{1}{10}, \frac{3}{10}]$.

1. Czy macierz A jest dodatnio określona?
2. Wyjaśnij czy dla dowolnego startowego przybliżenia x^0 obie metody są zbieżne do rozwiązania x^* jeśli zastosujemy je do tego układu równań.
3. W przypadku zbieżności metody Richardsona oszacuj współczynnik redukcji błędu $\|x^* - x^k\|_2 / \|x^* - x^{k-1}\|_2$. Tutaj x^k oznacza k-te iteracyjne przybliżenie generowane przez metodę Richardsona dla zadanego x^0.

Zadanie 4: Mamy funkcję gładką określoną na $\mathbb{R}$, której wartość w zadanym punkcie potrafimy policzyć kosztem N operacji arytmetycznych. Niech $W_M = \{a + k \cdot h\}_{k=0}^M$ dla $h = (b - a)/M$ zbiorem węzłów równo-odległych na odcinku $[a, b]$.

1. Sformułuj zadanie interpolacji Lagrange'a dla funkcji f i węzłów W_M
2. Czy ciąg w_M wielomianów interpolujących f w węzłach W_M zawsze zbiega jednostajnie do f?
3. Podaj najmniejsze takie p, że koszt znalezienia współczynników w_M w bazie Newtona dla zadanych M węzłów algorytmem różnic dzielonych wynosi $O(M^p)$ (N ustalone) .
4. Dla $a = -2$, $b = 1$, $M = 3$ i funkcji f takiej, że $f(k) = (-1)^k$ dla $k \in \mathbb{Z}$ znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego w bazie Newtona związanej z węzłami W_M przy pomocy algorytmu różnic dzielonych.

Zadanie 5: Niech $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$.

1. Podaj definicję kwadratury interpolacyjnej dla $I(f)$.
2. Czy kwadratura $Q(f) = 2f(-1) - 2f(0) + 2f(1)$ jest kwadraturą interpolacyjną dla $I(f)$? Podaj rząd $Q(f)$.
3. Czy istnieje kwadratura dla $I(f)$ oparta na trzech różnych punktach $\theta_k \in [-1, 1]$, tzn. postaci $\hat{Q}(f) = \sum_{k=0}^{2} A_k f(\theta_k)$, której rząd wynosi osiem?

Zadanie 6: Rozpatrzmy dwa równoważne układy równań liniowych $A_k x^* = b_k$ $k = 1, 2$, dla macierzy $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$. Po rozwiązaniu tych układów jakąś metodą otrzymano wektory x_k $k = 1, 2$ takie, że $\|A_k x_k - b_k\|_1 = 10^{-14}$. Czy możemy być pewni, że: $\|x^* - x_k\|_1 \leq 10^{-10}$?