Egzamin - Metody Numerycznych 2009/10 - II termin

Zadanie 1: Do rozwiązania równań $f_k(x^*) = 0,\ k = 1, 2, 3,$ dla $f_1(x) = x^2 - \pi^2$, $f_2(x) = \sin(x)$, $f_3 = \sin^2(x)$ których rozwiązaniem jest π zastosowano metodę Newtona z tym samym x_0 w dostatecznie bliskim otoczeniu π która we wszystkich wypadkach zbiegła.

	$nr\,1$	$nr\,2$	$nr\,3$
e_1	$2.3e-01$	$3.4e-02$	$4.6e-02$
e_2	$1.1e-01$	$1.8e-04$	$3.3e-05$
e_3	$5.5e-02$	$5.4e-09$	$1.1e-14$

1. podaj wzór na kolejną iteracje metody Newtona dla wszystkich funkcji.
2. Otrzymano następujące wyniki dla błędów $e_n = |x_n - \pi|$ ale nie wiadomo w której kolumnie są wyniki dla funkcji f_1 a w której dla funkcji f_2 czy f_3. Określ numer kolumny tabeli w której są wyniki dla funkcji f_k $k = 1, 2, 3$ z uzasadnieniem.

Zadanie 2: Dla przestrzeni V funkcji ciągłych na $[-1, 1]$ z normą $\|f\| = (\int_{-1}^{1} t^2 f(t)\ dt)^{1/2}$ i danej funkcji $f \in V$

1. sformułuj zadanie znalezienia elementu najlepszej aproksymacji dla f w przestrzeni $\mathcal{P}_n$ wielomianów stopnia co najwyżej n.
2. określ czy to zadania ma rozwiązanie dla dowolnej $f \in V$, a jeśli ma to określ czy wtedy wyznaczone jest one jednoznacznie.
3. znajdź element najlepszej aproksymacji $w_2 \in \mathcal{P}_2$ dla $f(t) = (7 * t^2 - 14) * t$. Policz $\|w_2 - f\|$.

Zadanie 3: Niech $A = A^T \in \mathbb{R}^3$ będzie macierzą

$$A = 2 * I - H$$

dla H macierzy Householdera z wektorem Householdera $w = [-1, 0, 1]$.

1. Oblicz wartości własne macierzy A.
2. Czy można użyć metody potęgowej i odwrotnej metody potęgowej do obliczenia odpowiednio największej i najmniejszej co do modułu wartości własnej macierzy A?
3. Podaj koszt jednej iteracji metody potęgowej zastosowanej do macierzy A.
4. Czy wektor $x_0 = [4, -7, 4]$ jest dobrym wektorem startowym dla metody potęgowej zastosowanej do A?

Zadanie 4: Mamy układ równań $T_\alpha x = b$, gdzie $T_\alpha \in \mathbb{R}^{n,n}$ dana macierz trójdiagonalna z α na przekątnej i z wartością minus jeden na pod- i nad-diagonalach tzn $(T_\alpha)_{k,l} = 0$ dla $|k - l| > 1$, $(T_\alpha)_{k,k} = \alpha$ dla $k = 1, \ldots, n$ i $(T_\alpha)_{k,k+1} = (T_\alpha)_{k+1,k} = -1$ dla $k = 1, \ldots, n - 1$, gdzie $\alpha \geq 2$, każda współrzędna wektora b, jest równa 1.

1. Podaj wzór na kolejną iteracje metody Jakobiego dla układu równań $T_\alpha x = b$. Zbadaj czy metoda ta iteracyjna Jacobiego jest zbieżna dla $\alpha > 2$ dla dowolnego wektora startowego.
2. Zaproponuj w pseudokodzie implementacje jednej iteracji metody Jakobiego dla układu równań $T_\alpha x = b$, podaje koszt tzn ilość operacji arytmetycznych fl w zależności od n.
3. Do rozwiązania układu równań $T_\alpha x = b$ użyto następującej metody iteracyjnej z parametrem $\beta > 0$

$$\frac{1}{\beta} D x_{k+1} = -\left(T_\alpha - \frac{1}{\beta} D\right) x_k + b,$$

gdzie D macierz diagonalna taka że $(D)_{k,k} = (T_\alpha)_{k,k} = \alpha$ dla $k = 1, \ldots, n$. Wyznacz możliwie dużo wartości β i α dla których metoda iteracyjna jest zbieżna dla dowolnego wektora startowego.