Egzamin - Metody Numerycznych 2009/10 - I termin

Zadanie 1: W celu obliczenia przybliżenia wartości $\sqrt[3]{a}$, gdzie $3 < a \in \mathbb{R}$, stosujemy kolejno dwie metody iteracyjne: bisekcji i Newtona do wyznaczenia miejsca zerowego funkcji $f(x) = x^3 - a$.
W pierwszym etapie znajdujemy dobre przybliżenie x_0 (punkt startowy) dla metody Newtona wykorzystując w tym celu metodę bisekcji tak, żeby

$$\left|\sqrt[3]{a} - x_0\right| \leq 10^{-3}.$$

Następnie wykonujemy iteracje metodą Newtona rozpoczynając iterowanie od punktu x_0.

1. Napisz wzór na kolejną iterację metody Newtona zastosowanej dla powyższej funkcji.
2. Ile kroków metody bisekcji należy wykonać, żeby osiągnąć podawane wyżej przybliżenie x_0 (punktu startowego dla metody Newtona), jeżeli początkowy przedział poszukiwań to $[0, a]$?
3. Ile kroków metody Newtona należy wykonać, żeby rozpoczynając iteracje od wyżej obliczonej wartości x_0 zachodziło

$$\left|\sqrt[3]{a} - x_k\right| \leq 10^{-15}$$

jeżeli x_k jest przybliżeniem otrzymanym w k-tym kroku metody Newtona?

Zadanie 2: Na płaszczyźnie dane są parami różne punkty $\{(x_k, y_k)\}_{k=1,\ldots,M}$ dla $M \geq 2$. Wyznaczono parabolę o równaniu $ax^2 + by = 1$ najlepiej (w sensie najmniejszych kwadratów) przybliżającą dane punkty tzn. wyznaczono a, b takie, że

$$\sum_{k=1}^{M} |ax_k^2 + by_k - 1|^2 = \min_{(\alpha,\beta)^T \in \mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^{M} |\alpha x_k^2 + \beta y_k - 1|^2$$

.

1. Przedstaw zadanie znalezienia $(a, b)^T$ jako LZNK w postaci układu równań $Ay = d$. Podaj warunek jaki muszą spełniać punkty $\{(x_k, y_k)\}_k$, aby LZNK było regularne.
2. Podaj koszt rozwiązania tego LZNK metodą rozkładu QR przy pomocy przekształceń Housholdera w zależności od M (bez stałych jako $O(M^p)$ dla pewnego p naturalnego).
3. Dla macierzy A układu dla konkretnych czterech punktów: $(1, 1)$, $(0, 4)$, $(0, 0)$, $(0, 3)$ wykonaj jej rozkład QR metodą przekształceń (odbić) Housholdera. Wykorzystując rozkład QR wylicz parametry a i b oraz wyznacz wielkość $\|d - Ay\|_2^2$.

Zadanie 3: Niech $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$ będą zadanymi punktami różnymi od siebie, leżącymi w przedziale $[a, b]$, gdzie $a < b$. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie zadaną funkcją.

1. Sformułuj zadanie interpolacji Lagrange'a funkcji f w punktach $\{x_0, \ldots, x_n\}$.
2. Niech $[a, b] = [-1, 1]$. Czy można wybrać węzły $\{x_0, \ldots, x_5\} \in [-1, 1]$ tak, aby uzyskać wielomian $\omega(x)$ stopnia ≤ 5 interpolujący funkcję $f(x) = e^{2x-2}$, którego błąd możemy oszacować następująco:

$$\|f - \omega\|_{\infty,[-1,1]} \leq \frac{1}{100}?$$

3. Wskaż współczynniki wielomianu stopnia ≤ 2 interpolującego e^{2x-2} w $\{-1, 0, 1\}$ w bazie Lagrange'a związanej z tymi punktami.

Zadanie 4: Mamy funkcjonał $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt$.

1. Podaj definicję kwadratury interpolacyjnej dla $I(f)$ oraz definicje rzędu kwadratury.
2. $Q(f) = A_1 f(-1) + A_2 f(0)$ jest kwadraturą interpolacyjną dla $I(f)$. Znajdź jej współczynniki A_1, A_2 oraz podaj jej rząd. Oszacuj błąd $|I(f) - Q(f)|$ dla $f(x) = \sin(0.25 * x)$.
3. Czy istnieje kwadratura dla $I(f)$ oparta na dwóch punktach tzn. postaci $\hat{Q}(f) = A_1 f(\theta_1) + A_2 f(\theta_2)$, której rząd wynosi 5?