Egzamin z obliczeń naukowych 2006 II termin

Uwagi wstępne

Wyniki wszystkich zadań z octave'a w jednym skrypcie i m-plikach.

Wyniki zadania z Bibliotek: jeden plik w C zawierający cały kod - i Makefile - komenda *make* ma kompilować program.

Proszę komentować wszystkie Państwa funkcje w C (krótko).

Wyniki zadań teoretycznych max. jedna strona A4. Wszystkie pliki wysyłacie Państwo mailem na adres: `lmarcin@mimuw.edu.pl`.

Niech **K** będzie sumą z zadań z Octave'a i Bibliotek komputerowych a **T** sumą punktów z zadań teoretycznych.

Warunkiem dopuszczenia do egzaminu ustnego jest $\mathbf{K} \geq \mathbf{10}$ i wtedy propozycję oceny będzie zależeć od $\mathbf{K} + \mathbf{T}$.

Octave

W wynku dyskretyzacji równania parabolicznego:

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 2 \qquad (t,x) \in [0,+\infty] \times (-1,1) \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0 \quad t > 0, \qquad u(0,x) = \cos(\pi * x/2) \end{aligned}$$

opisującego rozchodzenia się ciepła w podgrzewanym jednorodnie pręcie po zmiennej przestrzennej x na siatce równoodległej $x_k = -1 + k * h,\ k = 0,..,N+1$ dla $h = \frac{2}{N+1}$ otrzymaliśmy następujący układ równań zwyczajnych z warunkiem początkowym:

$$h * B\frac{d\vec{u}}{dt}(t) - \frac{1}{h}A\vec{u}(t) = h * \vec{f} \qquad \vec{u}(0) = \vec{v} \tag{1}$$

gdzie $h = \frac{2}{N+1}$, B, A macierze $N \times N$, $\vec{f}, \vec{v}$ wektory długości N zdefiniowane następująco:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & & & \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ & & & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

a $\vec{f} = (2,\ldots,2)^T$ i $\vec{v}_k = \cos(\pi * x_k/2)$ $k = 1,\ldots,N$.

Zadanie 1 (4pkt) Utwórz funkcje Octave'a o nazwie `mat` której parametrem będzie N zwracającą macierze A i B. Wykorzystaj tę funkcję aby utworzyć macierze dla $N = 10$ i $N = 30$. Podaj największą i najmniejszą wartość własną macierzy $C = \frac{1}{h^2}B^{-1}A$ dla $N = 30$.

Zadanie 2 (4pkt) Rozwiąż równanie (1) przy pomocy odpowiednich narzędzi Octave'a dla $N = 30$ na odcinku $[0,5]$. Narysuj przybliżone rozwiązanie dla $t = 5$ tzn $u(5,x)$.

Zadanie 3 (4pkt) Narysuj wykresy wszystkich przybliżonych rozwiązań dla $N = 30$ dla ustalonych czasów $t_k = k * \tau \in [0, 1]$ i $\tau = 0.1$ na jednym obrazku (odpowiednio podpisane) tzn odpowiednio wykresy przybliżeń $u(t_k, \cdot)$.

Zadanie 4 (3pkt) Znajdź maksimum i minimum przybliżenia $u(1, \cdot)$ oraz odpowiednie punkty ekstremalne dla $N = 30$

Biblioteki

Zadanie 5 (10pkt) Napisać funkcję która korzystając z funkcji `dgemv` z BLASów i `dgelss` z Lapacka obliczy rozwiązanie LZNK z daną macierzą A wymiaru $M \times N$ i wektorem prawej strony $B * \vec{f}$ wymiaru M dla danej macierzy B $M \times N$ i wektora $\vec{f}$ długości N.

Parametry wejściowe funkcji: macierze A, B, wektor f i wymiary M, N. Na wyjściu wynik w wektorze $\vec{f}$.

Zastosować do wektora $f = (3, 3)^T$ i macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wynik wyprowadzić na ekran.

Teoria

Zadanie 6 (2pkt) Czy układ RRZ $y' + Ay = 0;\ y(t_0) = y0$ dla $A = A^T > 0$ macierzy wymiaru $N \times N$ takiej że $\|A\|_2 = 1$ może być sztywnym? Który ze schematów lepiej zastosować do rozwiązywania tego układu w przypadku sztywności: otwarty czy zamknięty schemat Eulera (ze względu na koszt)?

Zadanie 7 (2pkt) Rozpatrzmy dwa równania nieliniowe: $(x + 1)^{5/2} = 0$ i $\sqrt{-x} * (x + 1) = 0$, oba równania mają pierwiastek równy -1. Czy jeśli zastosujemy metodę Newtona to otrzymamy zbieżność lokalną a jeśli tak to czy rząd zbieżnosci będzie co najmniej kwadratowy? (w świetle teorii którą Państwo znacie.)

Zadanie 8 (1pkt) Na czym polega technika optymalizacyjna nazywana rozwijaniem pętli?

Zadanie 9 (2pkt) Jakie biblioteki można zastosować do rozwiązywania zagadnienia własnego z macierzą A, zdefiniowaną w (2), dla dużych N?