GAL (I INF)

Kolokwium nr 2
19-01-2012

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.
Zapisujemy układ równań w postaci skróconej jako

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3\lambda & 2 & 0 & \lambda & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ (2\lambda-1) & 3 & -1 & (2\lambda+1) & 2 \end{array}\right|,$$

a następnie dokonujemy operacji elementarnych na jego wierszach,

$$w_3 := w_3 + 2w_1, \quad w_4 := w_4 - w_2 + w_1, \quad w_2 := w_2 - w_4,$$

otrzymując równoważny układ

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3\lambda & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right|.$$

Teraz mamy dwa przypadki.
(P1) $\lambda = 0$.
Wtedy układ przyjmuje postać

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right|.$$

Ponieważ początkowe trzy kolumny macierzy układu są liniowo niezależne to macierz ta ma rząd 3. To implikuje, że dla dowolnej prawej strony układ ma rozwiązanie i warstwa rozwiązań ma wymiar 1.
(P2) $\lambda \neq 0$.
Wtedy współrzędna x_4 rozwiązania (o ile rozwiązanie istnieje) jest zerowa, a współrzędne x_1, x_2, x_3 otrzymujemy z rozwiązania układu

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3\lambda & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right|.$$

Sprawdzamy, że wyznacznik macierzy tego układu wynosi $6+12\lambda$ i zeruje się jedynie dla $\lambda = -1/2$. Stąd, dla $\lambda \neq -1/2$ macierz ma pełny rząd, rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne, a tym samym wymiar warstwy rozwiązań wynosi 0.

Z kolei dla $\lambda = -1/2$ dokonujemy operacji elementarnych na wierszach,

$$w_2 := 2w_2, \quad w_2 := w_2 + 3w_1,$$

otrzymując układ

$$\left|\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right|.$$

Ponieważ układ ten jest sprzeczny, warstwa rozwiązań nie istnieje (i nie można mówić o jej wymiarze).

Zadanie 2.
Zgodnie z algorytmem eliminacji Gaussa, zerujemy najpierw wyrazy w pierwszej kolumnie macierzy wyjściowej wykonując operacje na wierszach,

$$w_2 := w_2 - w_1, \quad w_3 := w_3 - 3w_1, \quad w_4 := w_4 - 4w_1,$$

a następnie zerujemy wyrazy w drugiej kolumnie wykonując operacje

$$w_3 := w_3 - 2w_2, \quad w_4 := w_4 - 3w_2.$$

Otrzymujemy macierz

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

oraz "częściową" macierz L postaci

$$L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie w pozycjach (i, j) wpisujemy współczynniki przez które mnożyliśmy wiersz j-ty, aby odjąć go od wiersza i-tego.

Ponieważ wyraz $(3, 3)$ macierzy A' jest zerowy, musimy teraz zamienić wiersze trzeci z czwartym w tej macierzy, oraz zamienić te same wiersze w kolumnach pierwszej i drugiej macierzy L'. Dalsza eliminacja nie jest konieczna, bo otrzymana macierz jest już trójkątna górna. (Formalnie, dokonujemy operacji $w_4 := w_4 - 0 \cdot w_3$.)

Ostatecznie otrzymujemy rozkład $P * A * Q^T = L * R$ postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

przy czym w macierzy permutacji P odzwierciedlona jest jedyna zamiana wierszy, a $Q = I_4$, bo nie dokonywaliśmy zamian kolumn.

Aby odpowiedzieć na pozostałe pytanie, skorzystamy ze wzorów Cramera. Z rozkładu macierzy odczytujemy, że

$$\det(A) = \det([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_4]) = \det(R)/\det(P) = (-4)/(-1) = 4.$$

Stąd współrzędne x_j rozwiązania $\vec{x}$ układu $A * \vec{x} = 4\vec{b}$ wynoszą

$$x_j = \frac{\det([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, 4\vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n])}{4} = \det([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n]).$$

Teraz wystarczy zauważyć, że wyznacznik macierzy o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.

Zadanie 3.
Oznaczmy

$$h := f \circ g.$$

Ponieważ

$$f(\vec{x}) = A * F * A^{-1} * \vec{x}, \qquad g(\vec{x}) = B * \vec{x},$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

to $h(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = A * F * A^{-1} * B * \vec{x}$. Stąd

$$h(\vec{x}) = H * \vec{x}, \quad \text{gdzie} \quad H = A * F * A^{-1} * B.$$

Odwracając macierz A dostajemy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

i dalej

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aby znaleźć bazę jądra przekształcenia h dokonujemy operacji elementarnych na wierszach macierzy H,

$$w_2 := w_2 + w_1, \quad w_2 := w_2/2, \quad w_3 := w_3 - w_2,$$

otrzymując macierz

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

której rząd wynosi 2. Stąd $\dim(\mathcal{N}(H')) = 1$ i

$$\ker(h) = \mathcal{N}(H) = \mathcal{N}(H') = \operatorname{span}\left([0, 1, 1]^T\right).$$

Z kolei obraz h tworzą dowolne dwie liniowo niezależne kolumny macierzy H, np.

$$\operatorname{im}(h) = \mathcal{R}(H) = \operatorname{span}\left([1, -1, 0]^T, [0, 2, 1]^T\right).$$

Zadanie 4.
Oznaczmy bazy
$$\mathbb{A} = [1, t, t^2], \qquad \mathbb{B} = [1 + t, t + t^2, 1 + t^2].$$
Wtedy $\mathbb{B} = \mathbb{A} * C$, gdzie
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
jest macierzą zmiany bazy. Niech dalej G będzie poszukiwaną macierzą przekształcenia f w bazie $\mathbb{B}$. Wtedy
$$G = \mathbb{B}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{B} = (\mathbb{A} * C)^{-1} \cdot f \cdot (\mathbb{A} * C) = C^{-1} * \left(\mathbb{A}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{A}\right) * C = C^{-1} * F * C.$$
Odwracając macierz C w standardowy sposób otrzymujemy
$$C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
i ostatecznie
$$G = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Powyższy sposób rozwiązania jest uniwersalny. Jednak dla konkretnych danych w tym zadaniu można zauważyć, że, oznaczając $\mathbb{B} = [p_1, p_2, p_3]$, mamy
$$\begin{aligned} f(p_1) &= f(1 + t) = f(1) + f(t) = t^2 + t = p_2, \\ f(p_2) &= f(t + t^2) = f(t) + f(t^2) = t + 1 = p_1, \\ f(p_3) &= f(1 + t^2) = f(1) + f(t^2) = t^2 + 1 = p_3. \end{aligned}$$
Ponieważ, z definicji macierzy przekształcenia, w kolejnych kolumnach macierzy G stoją odpowiednio współczynniki rozwinięcia wektorów $f(p_j)$ w bazie $[p_1, p_2, p_3]$, rozwiązanie można odczytać bezpośrednio z powyższych zależności.

Zadanie 5.
Odejmując od ostatniego wiersza wszystkie pozostałe wiersze macierzy, od 1-szego do $(n-1)$-szego, otrzymujemy macierz trójkątną górną postaci
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & a \\ 0 & a & 0 & \dots & a \\ 0 & 0 & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{bmatrix},$$
gdzie $x = a - (n - 1)a = a(2 - n)$. Ponieważ zastosowane operacje elementarne nie zmieniają wartości wyznacznika oraz wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem wyrazów na głównej diagonali, poszukiwany wyznacznik strzałki Wilkinsona wynosi $a^n(2 - n)$.