GAL (I INF)
Kolokwium nr 2
19-01-2012

<u>Uwaga:</u> każde zadanie warte jest 4 punkty, niezależnie od stopnia trudności.

Zadanie 1. Znajdź wymiar warstwy rozwiązań układu równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3\lambda x_1 + 2x_2 + \lambda x_4 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ (3\lambda - 1)x_1 + 3x_2 - x_3 + (2\lambda + 1)x_4 = 2 \end{cases}$$

w zależności od parametru $\lambda \in \mathbf{R}$.

Zadanie 2. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Stosując *eliminację Gaussa* wyznacz macierze permutacji P i Q, trójkątną dolną L z jedynkami na głównej diagonali oraz trójkątną górną R rozkładu trójkątno-trójkątnego $P * A * Q^T = L * R$.

Wykaż, że dla każdego wektora $\vec{b} \in \mathbf{R}^4$ o współczynnikach całkowitych rozwiązanie $\vec{x} \in \mathbf{R}^4$ układu równań $A * \vec{x} = 4\vec{b}$ jest całkowite. (<u>Wskazówka</u>. Pamiętaj o wzorach Cramera.)

Zadanie 3. Niech $\mathbb{A} = \left[[1, 1, 1]^T, [1, 1, 0]^T, [2, 0, 0]^T \right]$ będzie bazą przestrzeni $\mathbf{R}^3_{|\mathbf{R}}$. Niech $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym, którego macierz w bazie $\mathbb{A}$ wynosi

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Niech dalej $g : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ będzie innym przekształceniem liniowym określonym wzorem

$$g\left([x_1, x_2, x_3]^T\right) = [x_2, x_1 + x_3, x_3]^T.$$

Znajdź bazy jądra i obrazu złożenia $h = f \circ g$.

Zadanie 4. Niech $f : \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}} \to \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ będzie przekształceniem liniowym, którego macierz w bazie potęgowej $[1, t, t^2]$ wynosi

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz tego przekształcenia w bazie wielomianów $[1 + t, t + t^2, 1 + t^2]$.

Zadanie 5. Oblicz wyznacznik *strzałki Wilkinsona*, czyli wyznacznik macierzy formatu $n \times n$ postaci

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & a \\ 0 & a & 0 & \dots & a \\ 0 & 0 & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \end{bmatrix},$$

dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ oraz $a \in \mathbb{R}$.