GAL (I INF)

Kolokwium nr 1

1-12-2011

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.
Stosując postać trygonometryczną liczb zespolonych i wzór de Moivre'a dostajemy kolejno

$$\begin{aligned}
1+\imath\sqrt{3} &= 2\left(\tfrac{1}{2}+\imath\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{3}+\imath\sin\tfrac{\pi}{3}\right)\\
-1+\imath\sqrt{3} &= 2\left(-\tfrac{1}{2}+\imath\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\tfrac{2\pi}{3}+\imath\sin\tfrac{2\pi}{3}\right)\\
\imath &= \cos\tfrac{\pi}{2}+\imath\sin\tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
z_1 &= (1+\imath\sqrt{3})^{100} = 2^{100}\left(\cos\tfrac{\pi}{3}+\imath\sin\tfrac{\pi}{3}\right)^{100}\\
&= 2^{100}\left(\cos\tfrac{100\pi}{3}+\imath\sin\tfrac{100\pi}{3}\right) = 2^{100}\left(\cos\tfrac{4\pi}{3}+\imath\sin\tfrac{4\pi}{3}\right)\\
z_2 &= (-1+\imath\sqrt{3})^{301} = 2^{301}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3}+\imath\sin\tfrac{2\pi}{3}\right)^{301}\\
&= 2^{301}\left(\cos\tfrac{602\pi}{3}+\imath\sin\tfrac{602\pi}{3}\right) = 2^{301}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3}+\imath\sin\tfrac{2\pi}{3}\right)\\
\sqrt[3]{z_3} &= \sqrt[3]{\imath} = \left(\cos\tfrac{\pi}{2}+\imath\sin\tfrac{\pi}{2}\right)^{1/3} = \cos\tfrac{\pi}{6}+\imath\sin\tfrac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{z}_1}{z_2}+z_1\cdot\sqrt[3]{z_3} &= \frac{2^{100}\left(\cos\frac{-4\pi}{3}+\imath\sin\frac{-4\pi}{3}\right)}{2^{301}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\imath\sin\frac{2\pi}{3}\right)} + 2^{100}\left(\cos\tfrac{4\pi}{3}+\imath\sin\tfrac{4\pi}{3}\right)\left(\cos\tfrac{\pi}{6}+\imath\sin\tfrac{\pi}{6}\right)\\
&= 2^{-201}(\cos(-2\pi)+\imath\sin(-2\pi)) + 2^{100}\left(\cos\tfrac{3\pi}{2}+\sin\tfrac{3\pi}{2}\right)\\
&= 2^{-201}-\imath\cdot 2^{100}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie, część rzeczywista żądanej liczby wynosi 2^{-201}, a część urojona -2^{100}.

Zadanie 2.
Ponieważ

$$\begin{aligned}
b_1+b_2+\cdots+b_n &= (a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_1)\\
&= a_1+(-a_2+a_2)+(-a_3+a_3)+\cdots+(-a_n+a_n)-a_1 \;=\; 0,
\end{aligned}$$

elementy $\{b_i\}_{i=1}^n$ są liniowo zależne, a jeśli tak to nie są bazą przestrzeni $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$.

Zadanie 3.
Dowolny wielomian

$$p(t) = a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \in \mathcal{P}^4_{|\mathbf{R}}$$

należy do zbioru W wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek

$$7(a_0-a_1+a_2-a_3)-6a_0+3(a_0+a_1+a_2+a_3)+2(a_0+2a_1+4a_2+8a_3) = 12,$$

który, po przeliczeniu, jest równoważny warunkowi

$$a_0 + 3a_2 + 2a_3 = 2.$$

Oznaczając $\alpha = a_1$, $\beta = a_2$, $\gamma = a_3$ mamy $a_0 = 2 - 3\beta - 2\gamma$, a stąd

$$\begin{aligned} p(t) &= (2 - 3\beta - 2\gamma) + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 \\ &= 2 + \alpha t + \beta(t^2 - 3) + \gamma(t^3 - 2). \end{aligned}$$

Ponieważ α, β, γ mogą być dowolne, ostatecznie otrzymujemy $W = W(p_0, \mathcal{Y})$, gdzie

$$p_0 \equiv 2, \qquad \mathcal{Y} = \operatorname{span}(t, t^2 - 3, t^3 - 2).$$

Zadanie 4.
Wykonując na wierszach macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

kolejno trzy operacje elementarne:

$$W_1 := W_1 + 3W_2, \quad W_3 := W_3 + 2W_2, \quad W_1 := W_1 - W_3,$$

otrzymujemy macierz

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ jest to macierz rzędu 2, to również $\operatorname{rz}(A) = 2$. Aby znaleźć bazę obrazu $\mathcal{R}(A)$ wystarczy więc wskazać dwie liniowo niezależne kolumny macierzy A, np.

$$\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Wobec $\dim(\mathcal{R}(A)) + \dim(\mathcal{N}(A)) = 3$, wymiar jądra macierzy A wynosi 1. Bazą jądra jest więc każdy wektor niezerowy będący rozwiązaniem równania jednorodnego $\widetilde{A} * \vec{x} = \vec{0}$, czyli

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ \quad\quad\;\; 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Przyjmując $x_3 = 1$ dostajemy $x_2 = 1/7$, $x_1 = -11/7$, a stąd

$$\mathcal{N}(A) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \right).$$

Zadanie 5.
Z definicji s_i wynika, że (s_1, s_2, s_3, s_4) jest bazą (funkcjonałów) sprzężoną z bazą (wielomianów) (p_1, p_2, p_3, p_4). Dlatego, jeśli $f = \sum_{i=1}^4 \alpha_i s_i$ to dla $1 \le j \le 4$ mamy

$$f(p_j) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i s_i(p_j) = \alpha_j.$$

Stąd współczynniki α_i wynoszą

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= f(p_1) = -1 - 1 + 3 \ = \ 1, \\
\alpha_2 &= f(p_2) = 2 - 0 + 4 \ = \ 6, \\
\alpha_3 &= f(p_3) = 0 + 0 + 2 \ = \ 2, \\
\alpha_4 &= f(p_4) = -24 - 1 + 26 \ = \ 1
\end{aligned}$$

oraz $f = s_1 + 6s_2 + 2s_3 + s_4$.