GAL (I INF)

Kolokwium nr 1

1-12-2011

Uwaga: każde zadanie warte jest 4 punkty, niezależnie od stopnia trudności.

Zadanie 1. Niech

$$z_1 = (1+\imath\sqrt{3})^{100}, \qquad z_2 = (-1+\imath\sqrt{3})^{301}, \qquad z_3 = \imath \qquad (\imath = \sqrt{-1}).$$

Wyznacz część rzeczywistą i część urojoną liczby

$$\frac{\bar{z}_1}{z_2} + z_1 \cdot \sqrt[3]{z_3}\ .$$

Zadanie 2. Niech układ $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ będzie bazą pewnej przestrzeni liniowej $\mathcal{X}_{|K}$. Rozstrzygnij, czy układ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, gdzie

$$\begin{cases} b_i = a_i - a_{i+1},\ 1 \le i \le n-1 \\ b_n = a_n - a_1, \end{cases}$$

jest również bazą $\mathcal{X}_{|K}$.

Zadanie 3. W przestrzeni $\mathcal{P}^4_{|\mathbf{R}}$ wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej 3 dany jest zbiór

$$W = \left\{ p \in \mathcal{P}^4_{|\mathbf{R}} :\ 7p(-1) - 6p(0) + 3p(1) + 2p(2) = 12 \right\}.$$

Wykaż, że W jest warstwą, tzn. $W = W(p_0, \mathcal{Y})$ dla pewnych $p_0 \in \mathcal{P}^4_{|\mathbf{R}}$ i $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}^4_{|\mathbf{R}}$. Znajdź p_0 i bazę $\mathcal{Y}$.

Zadanie 4. Dla danej macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{3,3}$$

znajdź jej rząd $\mathrm{rz}(A)$ oraz bazy jądra $\mathcal{N}(A)$ i obrazu $\mathcal{R}(A)$.

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathcal{P}^4_{|\mathbf{R}}$ dane są wielomiany

$$p_1(t) = 1 + 2t, \quad p_2(t) = t + 3t^2, \quad p_3(t) = t^2 + 3t^3, \quad p_4(t) = 1 + 25t^3.$$

oraz dany jest funkcjonał $f \in (\mathcal{P}^4_{\mathbf{R}})^*$, $f(p) = p(-1) - p(0) + p(1)$. Niech $s_1, s_2, s_3, s_4 \in (\mathcal{P}^4_{\mathbf{R}})^*$ spełniają warunki

$$s_i(p_i) = 1 \text{ dla } i = 1,2,3,4 \qquad \text{oraz} \qquad s_i(p_j) = 0 \text{ dla } i \neq j.$$

Zapisz f jako kombinację liniową funkcjonałów s_1, s_2, s_3, s_4.