GAL (I INF)

Kolokwium nr 2
17-01-2011

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.
Definiując macierz

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

mamy, że baza sprzężona

$$S = \begin{bmatrix} \vec{s}_1^T \\ \vdots \\ \vec{s}_n^T \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Odwracając macierz A łatwo dostajemy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

czyli $\vec{s}_k^T = \sum_{i=k}^n \vec{e}_i^T$, a stąd

$$[1, 2, 3, \ldots, n] = \sum_{k=1}^n \vec{s}_k^T.$$

Zadanie 2.
Dowolny wielomian $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{R}}^5$ możemy zapisać w postaci

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4, \qquad a_0, \ldots, a_4 \in \mathbf{R}.$$

Wówczas warunki opisujące elementy podzbioru W możemy zapisać w postaci układu równań

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 0 \end{bmatrix} * \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix},$$

gdzie $\vec{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ jest wektorem niewiadomych.
Zbiorem rozwiązań tego układu (otrzymanym w standardowy sposób) jest warstwa

$$W\left(\begin{bmatrix} -3/4 \\ -1/4 \\ 9/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -3/2 \\ -5/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right),$$

co odpowiada następującej warstwie w $\mathcal{P}^5_{\mathbf{R}}$:

$$W(-\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}t + \tfrac{9}{4}t^2, \mathrm{span}(-\tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}t + \tfrac{3}{2}t^2 + t^3, -t^2 + t^4).$$

To oznacza, że $\mathcal{Y} = \mathrm{span}(-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}t + \frac{3}{2}t^2 + t^3, -t^2 + t^4)$.

Zadanie 3.

Rozpatrzmy przekształcenie liniowe $f_1 : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{Y}_1$ zdefiniowane jako $f_1(x) = f(x)$, $x \in \mathcal{X}_1$. Wprost z definicji f_1 mamy, że $\ker(f_1) = \ker(f)$. Wobec tego, że $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}$ mamy również $\mathrm{im}(f_1) = \mathcal{Y}_1$. Stąd, wykorzystując twierdzenie z wykładu, że wymiar dziedziny przekształcenia liniowego jest sumą wymiarów jego jądra i obrazu otrzymujemy

$$\dim(\mathcal{X}_1) \;=\; \dim(\ker(f_1)) + \dim(\mathrm{im}(f_1)) \;=\; \dim(\ker(f)) + \dim(\mathcal{Y}_1).$$

Zadanie 4.

Podprzestrzenie $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ tworzą sumę prostą, bo jeśli $x \in \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ to $x = -x$, czyli x jest wektorem zerowym. Aby wykazać, że $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$ zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathcal{X}$ mamy $x = x_1 + x_2$, gdzie

$$x_1 = \frac{x + f(x)}{2}, \qquad x_2 = \frac{x - f(x)}{2}.$$

Sprawdzamy, że $x_1 \in \mathcal{X}_1$, bo

$$f(x_1) = \frac{f(x) + f(f(x))}{2} = \frac{f(x) + x}{2} = x_1,$$

oraz że $x_2 \in \mathcal{X}_2$, bo

$$f(x_2) = \frac{f(x) - f(f(x))}{2} = \frac{f(x) - x}{2} = -x_2,$$

co kończy dowód.

Zadanie 5.

Macierz A ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n \\ 1 & 4 & 6 & \cdots & 2n \\ 1 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n \end{bmatrix}.$$

Odejmując kolejno od k-tego wiersza wiersz $(k+1)$-szy dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ (w tej kolejności) otrzymujemy macierz trójkątną dolną

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\det(A) \;=\; \det(A_1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot (2n) = 2 \cdot n!$$