GAL (I INF)

Kolokwium nr 2
17-01-2011

Uwaga: każde zadanie warte jest 4 punkty, niezależnie od stopnia trudności.

Zadanie 1. W $\mathbf{C}^n$ rozpatrzmy bazę

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1, \qquad \vec{a}_k = \vec{e}_k - \vec{e}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Znajdź bazę $(\vec{s}_1^{\,T}, \vec{s}_2^{\,T}, \ldots, \vec{s}_n^{\,T})$ sprzężoną do bazy $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$. Zapisz funkcjonał $[1, 2, \ldots, n]$ w rozwinięciu względem bazy sprzężonej. ($\vec{e}_j$ oznacza j-ty wersor)

Zadanie 2. W przestrzeni $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}^5$ dany jest podzbiór

$$W \;=\; \{\, p \in \mathcal{P}_{\mathbf{R}}^5 : \, p(-1) + p(0) = 1, \, p(1) - p(0) = 2, \, p(2) - p(-2) + 4\,p(0) = -4 \,\}.$$

Przedstaw W jako warstwę pewnej podprzestrzeni liniowej $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}_{\mathbf{R}}^5$ i wyznacz bazę $\mathcal{Y}$.

Zadanie 3. Niech $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ będzie przekształceniem liniowym, a $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathrm{im}(f)$ podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{Y}$. Niech dalej

$$\mathcal{X}_1 \;=\; \{\, x \in \mathcal{X} : \; f(x) \in \mathcal{Y}_1 \}.$$

Wykaż, że

$$\dim(\mathcal{X}_1) \;=\; \dim(\ker(f)\,) \;+\; \dim(\mathcal{Y}_1).$$

Zadanie 4. Niech $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ będzie przekształceniem liniowym takim, że dla wszystkich $x \in \mathcal{X}$ mamy $(f \circ f)(x) = x$. Niech dalej

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \{\, x \in \mathcal{X} : \; f(x) = x \,\}, \\ \mathcal{X}_2 &= \{\, x \in \mathcal{X} : \; f(x) = -x \,\}. \end{aligned}$$

Wykaż, że $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$.

Zadanie 5. Znajdź wyznacznik $\det_n(A)$ macierzy $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, gdzie

$$a_{i,j} \;=\; \begin{cases} \;\; j, & i > j, \\ 2\,j, & i \le j. \end{cases}$$