GAL (I INF)
Kolokwium nr 1
29-11-2010

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.
Dla $\xi = 0$ równanie nie ma rozwiązań, a więc warunek jest spełniony. Niech $\xi \neq 0$. Wtedy część urojona liczby $p_\xi(z)$ jest równa ξ pomnożone przez część urojoną liczby z. Stąd, jeśli $p_\xi(u) = 0$ to część urojona liczby u jest zerowa, a co za tym idzie u jest liczbą rzeczywistą, $\overline{u} = u$, oraz $p_\xi(\overline{u}) = p_\xi(u)$.

Warunek w treści zadania jest więc spełniony dla wszystkich rzeczywistych wartości ξ.

Uwaga. Odpowiedź nie zależy od liczby rozwiązań równania $p_\xi(z) = 0$, która, w zależności od ξ, wynosi 0, 1 lub 2.

Zadanie 2.
Najpierw wyznaczamy

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\imath & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\imath & 1 & 0 \\ \imath & -1 & -\imath & 1 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \imath & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \imath & 1 & 0 \\ -\imath & -1 & \imath & 1 \end{bmatrix}.$$

Iloczyn tych macierzy wynosi

$$A^H * A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie wyznaczamy A^{-1}. W tym celu piszemy nastepującą macierz

$$(A \mid I) \equiv \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \imath & -1 & -\imath & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \imath & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \imath & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Po kilku operacjach elementarnych na wierszach otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\imath & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \equiv (I \mid A^{-1}).$$

Ostatecznie

$$A^H * A^T + A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\imath & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\imath & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -\imath \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3.
Ponieważ

$$\begin{aligned} H^T * H &= (I_n - 2 * \vec{u} * \vec{u}^T) * (I_n - 2 * \vec{u} * \vec{u}^T) \\ &= I_n - 4 * \vec{u} * \vec{u}^T + 4 * \vec{u} * (\vec{u}^T * \vec{u}) * \vec{u}^T = I_n, \end{aligned}$$

mamy

$$\|H * \vec{x}\|_2^2 = (H * \vec{x})^T * (H * \vec{x}) = \vec{x}^T * (H^T * H) * \vec{x} = \vec{x}^T * \vec{x} = \|\vec{x}\|_2^2$$

i w konsekwencji

$$\|H\|_2 = \sup_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|H * \vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2} = 1.$$

Zadanie 4.
Rozwiązując układ równań

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

otrzymujemy $x_3 = -x_4 - x_5$ i dalej $x_1 + x_2 = -x_3 = x_4 + x_5$, a stąd rozwiązanie ogólne dane wzorem

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ \gamma \\ -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \right\}.$$

Wstawiając za $[\alpha, \beta, \gamma]^T$ kolejne wersory dostajemy bazę przestrzeni $\mathcal{Y}$

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Bazę tą możemy teraz uzupełnić do bazy bazy w $\mathbf{R}^5$ wektorami

$$(\vec{a}_4, \vec{a}_5) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

przy czym liniowa niezależność całego układu wynika w szczególności z faktu, że wektory ustawione w kolejności $\vec{a}_5, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_2, \vec{a}_1$ tworzą macierz trójkątną górną.

Oczywiście, $s = 3$ i jest wyznaczone jednoznacznie, bo $s = \dim(\mathcal{Y})$.

Zadanie 5.
Ponieważ $\dim(\mathbf{C}^{n,n}) = n^2$ i macierzy $\vec{v}_i * \vec{v}_j^T$ jest też n^2, aby pokazać, że tworzą one bazę przestrzeni $\mathbf{C}^{n,n}$, wystarczy sprawdzić ich liniową niezależność.

Zgodnie ze wskazówką mamy $\vec{v}_j = V * \vec{e}_j$. Stąd dla $a_{i,j} \in \mathbf{C}^{n,n}$, $1 \le i, j \le n$, mamy

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} * \vec{v}_i * \vec{v}_j^T &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} * V * \vec{e}_i * (V * \vec{e}_j)^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} * V * (\vec{e}_i * \vec{e}_j^T) * V^T \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} * V * E_{i,j} * V^T = V * \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} * E_{i,j} \right) * V^T.\end{aligned}$$

To oznacza, że warunek

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} * \vec{v}_i * \vec{v}_j^T = 0$$

(gdzie zero z prawej strony oznacza macierz zerową) jest równoważny warunkowi

$$V * \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} * E_{i,j} \right) * V^T = 0.$$

Ponieważ V ma pełny rząd to jej kolumny są liniowo niezależne. Wobec tego ich liniowa kombinacja $V * \vec{x}$ jest wektorem zerowym tylko wtedy gdy $\vec{x} = \vec{0}$. Stąd wnioskujemy najpierw, że $\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} * E_{i,j} \right) * V^T = 0$, a następnie, że $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} * E_{i,j} = 0$.

Ponieważ układ $E_{i,j}$, $1 \le i, j \le n$, jest bazą w $\mathbf{C}^{n,n}$, z ostatniej równości wynika, że $a_{i,j} = 0$ dla wszystkich $1 \le i, j \le n$.